

Tổng hợp phương pháp chứng minh hai đường thẳng vuông góc bằng tích vô hướng

Trong chương trình Hình học không gian lớp 11, việc chứng minh hai đường thẳng vuông góc là một dạng toán nền tảng và quan trọng. Có nhiều phương pháp để giải quyết bài toán này, trong đó sử dụng tích vô hướng của hai vectơ là một công cụ mạnh mẽ, trực quan và thường được áp dụng, đặc biệt khi bài toán có thể gắn với hệ trục tọa độ.

1. Kiến thức nền tảng: Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian

Trước khi đi vào phương pháp chính, chúng ta cần nắm vững các kiến thức cốt lõi về tích vô hướng.

a. Định nghĩa tích vô hướng

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác vectơ-không. Tích vô hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, ký hiệu là $\vec{a} \cdot \vec{b}$, được xác định bởi công thức:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

Trong đó:

- $|\vec{a}|$ và $|\vec{b}|$ lần lượt là độ dài (mô-đun) của vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.
- $\cos(\vec{a}, \vec{b})$ là cosin của góc tạo bởi hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Trường hợp đặc biệt: Nếu $\vec{a} = \vec{0}$ hoặc $\vec{b} = \vec{0}$, ta quy ước $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

b. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai vecto $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ và $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$. Tích vô hướng của chúng được tính bằng công thức:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Đây là công thức cực kỳ quan trọng và được sử dụng thường xuyên trong các bài toán tính toán.

c. Tính chất của tích vô hướng

Với ba vecto bất kỳ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ và một số thực k, ta có các tính chất sau:

- Tính giao hoán: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- Tính phân phối đối với phép cộng vecto: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
- Tính kết hợp với phép nhân số thực: $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$
- Bình phương vô hướng: $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$
- **Tính chất quan trọng nhất:** Hai vecto $\vec{a}$ và $\vec{b}$ (khác vecto-không) vuông góc với nhau khi và chỉ khi tích vô hướng của chúng bằng 0.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

2. Phương pháp chứng minh hai đường thẳng vuông góc

a. Cơ sở lý thuyết

Phương pháp này dựa trên mối liên hệ giữa góc của hai đường thẳng và góc của hai vecto chỉ phương (VTCP) của chúng.

Cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 lần lượt có VTCP là $\vec{u_1}$ và $\vec{u_2}$. Ta có:

$$\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow \vec{u_1} \perp \vec{u_2} \Leftrightarrow \vec{u_1} \cdot \vec{u_2} = 0$$

Như vậy, để chứng minh hai đường thẳng vuông góc, ta chỉ cần chứng minh tích vô hướng của hai VTCP của chúng bằng 0.

b. Các bước giải toán tổng quát

Để chứng minh đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b, ta thực hiện theo các bước sau:

1. Bước 1: Xác định VTCP của hai đường thẳng.

- Chọn một vecto $\vec{u}$ làm VTCP của đường thẳng a ($\vec{u}$ phải có giá song song hoặc trùng với a).
- Chọn một vecto $\vec{v}$ làm VTCP của đường thẳng b ($\vec{v}$ phải có giá song song hoặc trùng với b).

2. Bước 2: Tính tích vô hướng $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

- Nếu bài toán có sẵn tọa độ, ta dùng công thức tọa độ: $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.
- Nếu bài toán không có tọa độ (hình học không gian thuần túy), ta có thể biến đổi vecto, sử dụng các tính chất của tích vô hướng để tính toán.

3. Bước 3: Kết luận.

- Nếu kết quả $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, ta kết luận hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau.
- Nếu kết quả khác 0, chúng không vuông góc.

3. Ví dụ minh họa chi tiết

Ví dụ 1: Bài toán trong hình lập phương

Đề bài: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Chứng minh rằng đường chéo AC vuông góc với đường chéo $B'D'$.

Cách giải 1: Sử dụng phương pháp tọa độ hóa

1. **Chọn hệ trục tọa độ:** Gắn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho gốc O trùng với đỉnh A, tia Ox trùng với AB, tia Oy trùng với AD, tia Oz trùng với AA' .

2. **Xác định tọa độ các đỉnh:**

- $A(0; 0; 0)$
- $B(a; 0; 0)$
- $C(a; a; 0)$
- $D(0; a; 0)$
- $A'(0; 0; a)$
- $B'(a; 0; a)$
- $D'(0; a; a)$

3. **Xác định VTCP:**

- Đường thẳng AC có VTCP là $\mathbf{AC} = (a-0; a-0; 0-0) = (a; a; 0)$.
- Đường thẳng $B'D'$ có VTCP là $\mathbf{B'D'} = (0-a; a-0; a-a) = (-a; a; 0)$.

4. **Tính tích vô hướng:**

$$\mathbf{AC} \cdot \mathbf{B'D'} = a.(-a) + a.a + 0.0 = -a^2 + a^2 + 0 = 0$$

5. **Kết luận:** Vì tích vô hướng của hai VTCP bằng 0 nên đường thẳng AC vuông góc với đường thẳng B'D'.

Cách giải 2: Sử dụng phương pháp biến đổi vecto

1. **Chọn các vecto cơ sở:** Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{x}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{y}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{z}$. Do đây là hình lập phương nên $|\vec{x}| = |\vec{y}| = |\vec{z}| = a$ và $\vec{x} \perp \vec{y}$, $\vec{y} \perp \vec{z}$, $\vec{z} \perp \vec{x}$. Suy ra: $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{z} = \vec{z} \cdot \vec{x} = 0$.

2. **Biểu diễn vecto cần tính:**

- $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \vec{x} + \vec{y}$
- $\overrightarrow{B'D'} = \overrightarrow{A'D'} - \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \vec{y} - \vec{x}$

3. **Tính tích vô hướng:**

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{B'D'} &= (\vec{x} + \vec{y}) \cdot (\vec{y} - \vec{x}) = \vec{x} \cdot \vec{y} - \vec{x} \cdot \vec{x} + \vec{y} \cdot \vec{y} - \vec{y} \cdot \vec{x} \\ &= 0 - |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 - 0 = -a^2 + a^2 = 0\end{aligned}$$

4. **Kết luận:** Vậy $AC \perp B'D'$.

Ví dụ 2: Bài toán trong hình chóp

Đề bài: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O, cạnh a. Có $SA = SC = a$ và $SB = SD$. Chứng minh rằng $SO \perp BD$.

Cách giải:

1. **Xác định VTCP:**

- Đường thẳng SO có VTCP là $\overrightarrow{SO}$.
- Đường thẳng BD có VTCP là $\overrightarrow{BD}$.

Ta cần chứng minh $\vec{SO} \cdot \vec{BD} = 0$.

2. Biến đổi vectơ:

- Vì O là trung điểm của AC và BD, ta có: $\vec{SO} = (\vec{SA} + \vec{SC})/2$
- Ta cũng có: $\vec{BD} = \vec{SD} - \vec{SB}$

3. Tính tích vô hướng:

$$\begin{aligned}\vec{SO} \cdot \vec{BD} &= (1/2)(\vec{SA} + \vec{SC}) \cdot (\vec{SD} - \vec{SB}) \\ &= (1/2) (\vec{SA} \cdot \vec{SD} - \vec{SA} \cdot \vec{SB} + \vec{SC} \cdot \vec{SD} - \vec{SC} \cdot \vec{SB})\end{aligned}$$

Bây giờ, ta sẽ sử dụng giả thiết về độ dài các cạnh. Xét các tam giác:

- $\triangle SAC$ cân tại S ($SA=SC=a$) có SO là trung tuyến nên cũng là đường cao $\Rightarrow SO \perp AC$.
- $\triangle SBD$ cân tại S ($SB=SD$) có SO là trung tuyến nên cũng là đường cao $\Rightarrow SO \perp BD$.

Cách tiếp cận này dẫn đến kết luận trực tiếp. Tuy nhiên, để minh họa cho tích vô hướng, ta có thể làm như sau:

Xét tam giác SBD cân tại S, SO là trung tuyến. Ta có:

$$\vec{SO} \cdot \vec{BD} = \vec{SO} \cdot (\vec{OD} - \vec{OB}) = \vec{SO} \cdot (2\vec{OD}) \quad (\text{vì O là trung điểm BD nên } \vec{OB} = -\vec{OD})$$

$$\text{Ta lại có: } \vec{SD} = \vec{SO} + \vec{OD} \text{ và } \vec{SB} = \vec{SO} + \vec{OB} = \vec{SO} - \vec{OD}.$$

$$\text{Do } SB = SD \text{ nên } SB^2 = SD^2.$$

$$\Leftrightarrow |\vec{SB}|^2 = |\vec{SD}|^2 \Leftrightarrow \vec{SB}^2 = \vec{SD}^2$$

$$\Leftrightarrow (SO - OD)^2 = (SO + OD)^2$$

$$\Leftrightarrow SO^2 - 2SO \cdot OD + OD^2 = SO^2 + 2SO \cdot OD + OD^2$$

$$\Leftrightarrow -2SO \cdot OD = 2SO \cdot OD$$

$$\Leftrightarrow 4SO \cdot OD = 0 \Leftrightarrow SO \cdot OD = 0.$$

Do $BD = 2OD$, nên $SO \cdot BD = 2(SO \cdot OD) = 0$.

4. **Kết luận:** Vậy $SO \perp BD$.

4. Lưu ý và các lỗi sai thường gặp

Lưu ý / Lỗi sai	Mô tả và cách khắc phục
Xác định sai VTCP	VTCP của đường thẳng AB là vecto $\overrightarrow{AB}$ hoặc các vecto cùng phương với nó ($k\cdot\overrightarrow{AB}$). Tránh nhầm lẫn với vecto pháp tuyến của mặt phẳng. Cần chọn các vecto có giá song song hoặc trùng với đường thẳng.
Lỗi tính toán	Khi tính tích vô hướng bằng tọa độ, cần cẩn thận với dấu của các thành phần. Một lỗi nhỏ về dấu có thể làm kết quả từ 0 thành khác 0. Hãy kiểm tra lại phép tính nhân và cộng.
Nhầm lẫn vuông góc và chéo nhau	Phương pháp tích vô hướng bằng 0 chứng minh được hai đường thẳng có phương vuông góc. Chúng có thể cắt nhau và vuông góc, hoặc chéo nhau mà vẫn vuông góc. Điều kiện này chỉ nói về góc, không nói về vị trí tương đối (cắt hay chéo).
Lạm dụng tọa độ hóa	Phương pháp tọa độ hóa rất mạnh, nhưng đôi khi việc chọn hệ trục phức tạp hoặc tính toán tọa độ công kênh. Với một số bài toán có sẵn các yếu tố vuông góc, việc biến đổi vecto thuần túy (như ví dụ 1, cách 2) có thể nhanh và thanh lịch hơn.

Tóm lại, việc sử dụng tích vô hướng là một công cụ hiệu quả để giải quyết các bài toán chứng minh vuông góc trong hình học không gian. Học sinh cần nắm vững cả cách tiếp cận bằng tọa độ và cách biến đổi vecto thuần túy để có thể

linh hoạt lựa chọn phương pháp tối ưu cho từng bài toán cụ thể.

VIDOCU.COM