

TỔNG HỢP PHƯƠNG PHÁP TÌM ĐIỂM BIỂU DIỄN SỐ PHỨC

A. Kiến thức cơ bản cần nắm

Trước khi đi vào các dạng bài tập cụ thể, học sinh cần nắm vững các khái niệm nền tảng sau:

- **Số phức:** Dạng $z = a + bi$ (trong đó a, b là các số thực, i là đơn vị ảo với $i^2 = -1$). a là phần thực, b là phần ảo.
- **Điểm biểu diễn số phức:** Mỗi số phức $z = a + bi$ được biểu diễn bởi một điểm $M(a; b)$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy (còn gọi là mặt phẳng phức).
- **Môđun của số phức:** Môđun của số phức $z = a + bi$, ký hiệu là $|z|$, là độ dài của vectơ OM. Công thức: $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- **Khoảng cách giữa hai điểm:** Khoảng cách giữa hai điểm A, B biểu diễn hai số phức z_1, z_2 là $AB = |z_1 - z_2|$.

B. Các dạng toán tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức (Quỹ tích)

Giả sử số phức $z = x + yi$ được biểu diễn bởi điểm $M(x; y)$ trên mặt phẳng phức.

Dạng 1: Tập hợp điểm là ĐƯỜNG THẲNG

1. Phương pháp tổng quát

Thay $z = x + yi$ vào điều kiện đã cho, biến đổi và rút gọn để đưa về phương trình đường thẳng có dạng **$Ax + By + C = 0$** .

2. Các trường hợp thường gặp

Trường hợp 1: $|z - z_1| = |z - z_2|$

- **Công thức:** Cho hai số phức $z_1 = a_1 + b_1i$ và $z_2 = a_2 + b_2i$. Tập hợp các điểm $M(z)$ thỏa mãn $|z - z_1| = |z - z_2|$ là đường trung trực của đoạn thẳng AB , với $A(a_1, b_1)$ và $B(a_2, b_2)$.
- **Giải thích:** Điều kiện $|z - z_1| = |z - z_2|$ có nghĩa là $MA = MB$. Tập hợp các điểm M cách đều hai điểm A, B cố định chính là đường trung trực của đoạn AB .

Ví dụ 1: Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z - 1 + i| = |z + 2 - 3i|$.

Cách 1: Phương pháp đại số

Đặt $z = x + yi$. Ta có: $|(x - 1) + (y + 1)i| = |(x + 2) + (y - 3)i| \Rightarrow \sqrt{(x - 1)^2 + (y + 1)^2} = \sqrt{(x + 2)^2 + (y - 3)^2} \Rightarrow (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = (x + 2)^2 + (y - 3)^2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 \Rightarrow -2x + 2y + 2 = 4x - 6y + 9 \Rightarrow 6x - 8y + 11 = 0$. Vậy tập hợp điểm là đường thẳng $6x - 8y + 11 = 0$.

Cách 2: Phương pháp hình học

Điều kiện tương đương $|z - (1 - i)| = |z - (-2 + 3i)|$. Gọi $M(z)$, $A(1; -1)$, $B(-2; 3)$.

Điều kiện trở thành $MA = MB$. Vậy M nằm trên đường trung trực của đoạn AB .

Phương trình đường trung trực của AB có dạng $6x - 8y + 11 = 0$.

Trường hợp 2: Dạng $|az + b| = |cz + d|$

Ví dụ 2: Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|(1+i)z + 1 - 7i| = |(1-i)z - 3 - i|$.

Đặt $z = x + yi$. $|(1+i)(x+yi) + 1 - 7i| = |(1-i)(x+yi) - 3 - i|$
 $|x - y + 1 + (x + y - 7)i| = |x - y - 3 + (-x + y - 1)i|$
 $\Rightarrow (x - y + 1)^2 + (x + y - 7)^2 = (x - y - 3)^2 + (-x + y - 1)^2$
Sau khi khai triển và rút gọn, ta được: $-12x - 8y + 40 = 0$ hay $3x + 2y - 10 = 0$.
Vậy tập hợp điểm là đường thẳng $3x + 2y - 10 = 0$.

Dạng 2: Tập hợp điểm là ĐƯỜNG TRÒN

1. Phương pháp tổng quát

Thay $z = x + yi$ vào điều kiện, biến đổi và rút gọn để đưa về phương trình đường tròn có dạng $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ hoặc $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ (với $a^2 + b^2 - c > 0$).

2. Các trường hợp thường gặp

Trường hợp 1: $|z - z_0| = R$

- **Công thức:** Cho số phức $z_0 = a + bi$ và số thực dương R . Tập hợp các điểm $M(z)$ thỏa mãn $|z - z_0| = R$ là đường tròn tâm $I(a, b)$ bán kính R .
- **Giải thích:** Điều kiện $|z - z_0| = R$ có nghĩa là $MI = R$, với I là điểm biểu diễn z_0 . Tập hợp các điểm M cách điểm I cố định một khoảng không đổi R chính là đường tròn tâm I , bán kính R .

Ví dụ 1: Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z - 2 - 3i| = 5$.

Cách 1: Phương pháp đại số

Đặt $z = x + yi$. Ta có: $|(x - 2) + (y - 3)i| = 5 \Rightarrow \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 3)^2} = 5 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$. Vậy tập hợp điểm là đường tròn tâm $I(2; 3)$ và bán kính $R = 5$.

Cách 2: Phương pháp hình học

Điều kiện tương đương $|z - (2 + 3i)| = 5$. Gọi $M(z)$ và $I(2; 3)$ là điểm biểu diễn số phức $2 + 3i$. Điều kiện trở thành $MI = 5$. Vậy M nằm trên đường tròn tâm $I(2; 3)$, bán kính $R = 5$.

Trường hợp 2: $|(z - z_1)/(z - z_2)| = k$ (với $k > 0, k \neq 1$)

Đây là phương trình đường tròn Apollonius.

Ví dụ 2: Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|(z + 2)/(z - i)| = 2$.

Điều kiện: $|z + 2| = 2|z - i|$ (với $z \neq i$). Đặt $z = x + yi$. Ta có: $|x + 2 + yi| = 2|x + (y - 1)i| \Rightarrow (x + 2)^2 + y^2 = 4(x^2 + (y - 1)^2) \Rightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 = 4(x^2 + y^2 - 2y + 1) \Rightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 = 4x^2 + 4y^2 - 8y + 4 \Rightarrow 3x^2 + 3y^2 - 4x - 8y = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - (4/3)x - (8/3)y = 0$. Đây là phương trình đường tròn tâm $I(2/3; 4/3)$ và bán kính $R = \sqrt{(2/3)^2 + (4/3)^2} = (2\sqrt{5})/3$.

Dạng 3: Tập hợp điểm là ĐƯỜNG ELIP

- **Công thức:** Cho hai số phức z_1 và z_2 . Tập hợp các điểm $M(z)$ thỏa mãn $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$, với $2a > |z_1 - z_2|$, là một đường elip (E) có hai tiêu điểm F_1, F_2 (lần lượt biểu diễn z_1, z_2) và độ dài trục lớn bằng $2a$.

- **Phương trình chính tắc của Elip:** $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$, trong đó $c = |z_1 - z_2|/2$ và $b^2 = a^2 - c^2$.

Ví dụ: Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z - 3| + |z + 3| = 10$.

Gọi $M(z)$, $F_1(3; 0)$ biểu diễn số phức 3, $F_2(-3; 0)$ biểu diễn số phức -3. Điều kiện đã cho trở thành $MF_1 + MF_2 = 10$. Đây là phương trình của elip (E) có hai tiêu điểm $F_1(3; 0)$, $F_2(-3; 0)$ và độ dài trục lớn $2a = 10 \Rightarrow a = 5$. Ta có $F_1F_2 = |3 - (-3)| = 6$. Tiêu cự $2c = 6 \Rightarrow c = 3$. Ta có $b^2 = a^2 - c^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow b = 4$. Phương trình chính tắc của elip là: $(x^2/25) + (y^2/16) = 1$. Vậy tập hợp điểm là elip (E): $(x^2/25) + (y^2/16) = 1$.

Dạng 4: Tập hợp điểm là ĐƯỜNG HYPEBOL

- **Công thức:** Cho hai số phức z_1 và z_2 . Tập hợp các điểm $M(z)$ thỏa mãn $||z - z_1| - |z - z_2|| = 2a$, với $0 < 2a < |z_1 - z_2|$, là một đường hypebol (H) có hai tiêu điểm F_1, F_2 (lần lượt biểu diễn z_1, z_2) và độ dài trục thực bằng $2a$.

Ví dụ: Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $||z - 5| - |z + 5|| = 6$.

Gọi $M(z)$, $F_1(5; 0)$, $F_2(-5; 0)$. Điều kiện đã cho trở thành $|MF_1 - MF_2| = 6$. Đây là phương trình của hypebol (H) có hai tiêu điểm $F_1(5; 0)$, $F_2(-5; 0)$ và độ dài trục thực $2a = 6 \Rightarrow a = 3$. Ta có $F_1F_2 = |5 - (-5)| = 10$. Tiêu cự $2c = 10 \Rightarrow c = 5$. Ta có $b^2 = c^2 - a^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow b = 4$. Phương trình chính tắc của hypebol là: $(x^2/9) - (y^2/16) = 1$. Vậy tập hợp điểm là hypebol (H): $(x^2/9) - (y^2/16) = 1$.

Dạng 5: Tập hợp điểm là các hình khác (Đoạn thẳng, Tia)

- **Đoạn thẳng:** Tập hợp điểm $M(z)$ thỏa mãn $z = (1-t)z_1 + tz_2$ với $0 \leq t \leq 1$ là đoạn thẳng AB với $A(z_1)$, $B(z_2)$.

- **Tia:** Tập hợp điểm $M(z)$ thỏa mãn $\arg(z - z_0) = \alpha$ là một tia xuất phát từ điểm $A(z_0)$ và tạo với phương ngang một góc α .

C. Bảng tổng hợp các dạng quỹ tích thường gặp

Dạng điều kiện	Kết luận quỹ tích	Ghi chú
$ z - z_1 = z - z_2 $	Đường trung trực của đoạn thẳng AB, với $A(z_1), B(z_2)$.	Quỹ tích là đường thẳng.
$ z - z_0 = R \ (R > 0)$	Đường tròn tâm $I(z_0)$, bán kính R .	Quỹ tích là đường tròn.
$ z - z_1 + z - z_2 = 2a$	Đường Elip có 2 tiêu điểm $A(z_1), B(z_2)$ và trục lớn $2a$.	Điều kiện: $2a > z_1 - z_2 $.
$ z - z_1 - z - z_2 = 2a$	Đường Hypebol có 2 tiêu điểm $A(z_1), B(z_2)$.	Điều kiện: $0 < 2a < z_1 - z_2 $.
z là số thực	Trục hoành $Ox \ (y = 0)$.	Phần ảo bằng 0.
z là số thuần ảo	Trục tung $Oy \ (x = 0)$.	Phần thực bằng 0.

D. Bài tập vận dụng

- Bài 1:** Tìm tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $|z + 2i - 1| = |\bar{z} + i|$.

Hướng dẫn: Đặt $z = x + yi, \bar{z} = x - yi$. Thay vào phương trình và rút gọn. Kết quả sẽ là một đường thẳng.

2. **Bài 2:** Cho số phức z thỏa mãn $(z + 2 - 3i)(\bar{z} + 2 + 3i) = 25$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn. Tìm tâm và bán kính của đường tròn đó.

Hướng dẫn: Sử dụng tính chất $z \cdot \bar{z} = |z|^2$. Biến đổi phương trình về dạng $|z - z_0|^2 = R^2$. Kết quả là đường tròn tâm $I(-2; 3)$, $R=5$.

3. **Bài 3:** Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = (1 + i\sqrt{3})z + 2$, biết rằng số phức z thỏa mãn $|z - 1| \leq 2$.

Hướng dẫn: Rút z theo w : $z = (w-2)/(1+i\sqrt{3})$. Thay vào điều kiện $|z-1| \leq 2$ và tìm ra quỹ tích của w . Kết quả sẽ là một hình tròn.