

Tổng hợp kiến thức Hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) và đồ thị Parabol

I. Lý thuyết trọng tâm về hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

1. Định nghĩa

Hàm số có dạng $y = ax^2$ (với a là hằng số, $a \neq 0$) là một hàm số bậc hai có dạng đơn giản nhất.

- **Tập xác định:** Hàm số xác định với mọi giá trị của x thuộc tập hợp số thực $\mathbb{R}$. ($D = \mathbb{R}$)

Ví dụ:

- $y = 3x^2$ ($a = 3 > 0$)
- $y = -x^2$ ($a = -1 < 0$)
- $y = \frac{1}{2}x^2$ ($a = \frac{1}{2} > 0$)

2. Tính chất của hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

Tính chất của hàm số, đặc biệt là sự đồng biến và nghịch biến, phụ thuộc hoàn toàn vào dấu của hệ số a .

Đặc điểm	Trường hợp $a > 0$	Trường hợp $a < 0$
Chiều biến thiên	- Khi $x < 0$: Hàm số nghịch biến (x tăng thì y giảm). - Khi $x > 0$: Hàm số đồng biến (x tăng thì y tăng).	- Khi $x < 0$: Hàm số đồng biến (x tăng thì y tăng). - Khi $x > 0$: Hàm số nghịch biến (x tăng thì y giảm).
Giá trị của hàm số	$y > 0$ với mọi $x \neq 0$. $y = 0$ khi $x = 0$. - Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $y = 0$, đạt được khi $x = 0$.	$y < 0$ với mọi $x \neq 0$. $y = 0$ khi $x = 0$. - Giá trị lớn nhất của hàm số là $y = 0$, đạt được khi $x = 0$.

Ví dụ 1 ($a > 0$): Xét hàm số $y = 2x^2$.

- Hàm số nghịch biến khi $x < 0$.
- Hàm số đồng biến khi $x > 0$.
- Giá trị nhỏ nhất là $y = 0$ tại $x = 0$.

Ví dụ 2 ($a < 0$): Xét hàm số $y = -x^2$.

- Hàm số đồng biến khi $x < 0$.
- Hàm số nghịch biến khi $x > 0$.
- Giá trị lớn nhất là $y = 0$ tại $x = 0$.

II. Đồ thị hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

1. Đặc điểm của đồ thị

Đồ thị của hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) là một đường cong được gọi là **Parabol** có đỉnh tại gốc tọa độ $O(0,0)$.

- **Đỉnh:** Gốc tọa độ $O(0,0)$ là đỉnh của Parabol.
- **Trục đối xứng:** Trục tung (Oy) là trục đối xứng của Parabol.
- **Vị trí:**
 - Nếu **$a > 0$** : Đồ thị nằm phía trên trục hoành (Ox). $O(0,0)$ là điểm thấp nhất của đồ thị.
 - Nếu **$a < 0$** : Đồ thị nằm phía dưới trục hoành (Ox). $O(0,0)$ là điểm cao nhất của đồ thị.

2. Các bước vẽ đồ thị hàm số $y = ax^2$ (Parabol)

Để vẽ đồ thị hàm số $y = ax^2$, ta thực hiện theo các bước sau:

1. **Lập bảng giá trị:** Tìm một số cặp giá trị (x, y) tương ứng của hàm số. Nên chọn ít nhất 5 điểm, trong đó có đỉnh $O(0,0)$ và các cặp điểm đối xứng nhau qua trục Oy . Ví dụ: $(-2, y_1)$, $(-1, y_2)$, $(0, 0)$, $(1, y_2)$, $(2, y_1)$.
2. **Biểu diễn các điểm trên mặt phẳng tọa độ:** Chấm các điểm vừa tìm được ở bảng giá trị lên hệ trục tọa độ Oxy .
3. **Vẽ Parabol:** Nối các điểm đã biểu diễn bằng một đường cong trơn, không gãy khúc. Lưu ý vẽ đường cong đối xứng qua trục Oy .

Ví dụ 1: Vẽ đồ thị hàm số $y = x^2$ ($a = 1 > 0$).

Bước 1: Lập bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

Bước 2 & 3: Biểu diễn các điểm A(-2,4), B(-1,1), O(0,0), C(1,1), D(2,4) trên mặt phẳng tọa độ và nối chúng lại ta được Parabol hướng bề lõm lên trên.

Ví dụ 2: Vẽ đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$ ($a = -\frac{1}{2} < 0$).

Bước 1: Lập bảng giá trị

x	-4	-2	0	2	4
$y = -\frac{1}{2}x^2$	-8	-2	0	-2	-8

Bước 2 & 3: Biểu diễn các điểm M(-4,-8), N(-2,-2), O(0,0), P(2,-2), Q(4,-8) trên mặt phẳng tọa độ và nối chúng lại ta được Parabol hướng bề lõm xuống dưới.

III. Vị trí tương đối giữa Parabol và đường thẳng

Xét Parabol (P): $y = ax^2$ ($a \neq 0$) và đường thẳng (d): $y = mx + n$.

Để xác định vị trí tương đối giữa (P) và (d), ta xét phương trình hoành độ giao điểm của chúng:

$$ax^2 = mx + n \Leftrightarrow ax^2 - mx - n = 0 (*)$$

Đây là một phương trình bậc hai ẩn x. Số nghiệm của phương trình (*) chính là số giao điểm của (P) và (d).

- Nếu phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt ($\Delta > 0$): Đường thẳng (d) **cắt** Parabol (P) tại hai điểm phân biệt.
- Nếu phương trình (*) có nghiệm kép ($\Delta = 0$): Đường thẳng (d) **tiếp xúc** với Parabol (P) tại một điểm (gọi là tiếp điểm).
- Nếu phương trình (*) vô nghiệm ($\Delta < 0$): Đường thẳng (d) và Parabol (P) **không có điểm chung**.

Ví dụ: Tìm tọa độ giao điểm của Parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = x + 2$.

Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$x^2 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$\text{Ta có } a = 1, b = -1, c = -2. \Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(-2) = 1 + 8 = 9 > 0.$$

Vì $\Delta > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = (-b + \sqrt{\Delta}) / 2a = (1 + 3) / 2 = 2$$

$$x_2 = (-b - \sqrt{\Delta}) / 2a = (1 - 3) / 2 = -1$$

Với $x_1 = 2$, thay vào $y = x^2$ ta được $y_1 = 2^2 = 4$. Giao điểm là A(2, 4).

Với $x_2 = -1$, thay vào $y = x^2$ ta được $y_2 = (-1)^2 = 1$. Giao điểm là B(-1, 1).

Vậy (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A(2, 4) và B(-1, 1).

IV. Các dạng bài tập thường gặp

Dạng 1: Xác định hệ số a của Parabol

Phương pháp: Nếu Parabol (P): $y = ax^2$ đi qua điểm $M(x_0, y_0)$, ta thay tọa độ của M vào phương trình hàm số (thay $x = x_0, y = y_0$) để tìm a.

Ví dụ: Xác định hệ số a của hàm số $y = ax^2$, biết đồ thị của nó đi qua điểm A(2; -2).

Giải:

Vì đồ thị hàm số $y = ax^2$ đi qua điểm A(2; -2) nên ta có:

$$-2 = a * (2)^2$$

$$-2 = 4a$$

$$a = -2 / 4 = -1/2$$

Vậy hàm số cần tìm là $y = -\frac{1}{2}x^2$.

Dạng 2: Tìm tọa độ giao điểm

Phương pháp: Lập phương trình hoành độ giao điểm, giải phương trình tìm hoành độ x, sau đó thay x vào một trong hai phương trình ban đầu để tìm tung độ y tương ứng.

Ví dụ: Tìm giao điểm của (P): $y = -x^2$ và (d): $y = 2x - 3$.

Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$-x^2 = 2x - 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$

Phương trình có dạng $a + b + c = 1 + 2 + (-3) = 0$ nên có hai nghiệm:

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = c/a = -3$$

Với $x_1 = 1$, $y_1 = -(1)^2 = -1$. Giao điểm M(1, -1).

Với $x_2 = -3$, $y_2 = -(-3)^2 = -9$. Giao điểm N(-3, -9).

Dạng 3: Biện luận số giao điểm của (d) và (P)

Phương pháp: Dựa vào dấu của Δ (hoặc Δ') của phương trình hoành độ giao điểm (*).

Ví dụ: Cho Parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = 2x - m$. Tìm m để (d) tiếp xúc với (P).

Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 = 2x - m \Leftrightarrow x^2 - 2x + m = 0$.

Để (d) tiếp xúc với (P), phương trình trên phải có nghiệm kép. Điều này xảy ra khi $\Delta' = 0$.

$$\Delta' = (-1)^2 - 1 \cdot m = 1 - m$$

$$\Delta' = 0 \Leftrightarrow 1 - m = 0 \Leftrightarrow m = 1.$$

Vậy với $m = 1$ thì đường thẳng (d) tiếp xúc với Parabol (P).