

Tổng hợp kiến thức Hình học Oxyz Lớp 12

Tài liệu này cung cấp một cái nhìn tổng quan và chi tiết về các kiến thức cốt lõi của chương trình Hình học giải tích trong không gian Oxyz, giúp học sinh ôn tập và củng cố kiến thức hiệu quả.

Phần 1: Hệ tọa độ và các phép toán cơ bản

1.1. Tọa độ của điểm và vector

- **Tọa độ điểm:** Trong không gian Oxyz, một điểm M được xác định duy nhất bởi bộ ba số $(x; y; z)$, kí hiệu $M(x; y; z)$.
- **Tọa độ vector:** Vector $\mathbf{u}$ được xác định bởi bộ ba số $(x; y; z)$, kí hiệu $\mathbf{u} = (x; y; z)$ hoặc $\mathbf{u} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.
- **Vector nối hai điểm:** Cho $A(x_a; y_a; z_a)$ và $B(x_e; y_e; z_e)$, ta có $\mathbf{AB} = (x_e - x_a; y_e - y_a; z_e - z_a)$.

1.2. Các phép toán với vector

Cho hai vector $\mathbf{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\mathbf{b} = (b_1; b_2; b_3)$:

- **Tổng/Hiệu hai vector:** $\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3)$
- **Nhân vector với một số:** $k\mathbf{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$
- **Tích vô hướng:** $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$. Ứng dụng: $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$, $\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) / (|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|)$.

1.3. Tích có hướng và ứng dụng

Công thức: Cho $\mathbf{a}=(a_1; a_2; a_3)$ và $\mathbf{b}=(b_1; b_2; b_3)$, tích có hướng của $\mathbf{a}$ và $\mathbf{b}$ là $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1)$.

Tính chất và ứng dụng:

- Vector $\mathbf{c} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ vuông góc với cả $\mathbf{a}$ và $\mathbf{b}$.
- $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{0}$.
- Ba vector $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \cdot \mathbf{c} = 0$.
- Diện tích hình bình hành ABCD: $S = |[\mathbf{AB}, \mathbf{AD}]|$.
- Diện tích tam giác ABC: $S = \frac{1}{2} |[\mathbf{AB}, \mathbf{AC}]|$.
- Thể tích khối hộp ABCDA'B'C'D': $V = |[\mathbf{AB}, \mathbf{AD}] \cdot \mathbf{AA}'|$.
- Thể tích tứ diện ABCD: $V = \frac{1}{6} |[\mathbf{AB}, \mathbf{AC}] \cdot \mathbf{AD}|$.

Ví dụ: Cho $\mathbf{a}=(1; 2; 0)$ và $\mathbf{b}=(3; 0; -1)$. Tính $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Giải: $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (2 \cdot (-1) - 0 \cdot 0; 0 \cdot 3 - 1 \cdot (-1); 1 \cdot 0 - 2 \cdot 3) = (-2; 1; -6)$.

Phần 2: Phương trình mặt phẳng

2.1. Vector pháp tuyến và Phương trình tổng quát

Một mặt phẳng (P) hoàn toàn được xác định nếu biết một điểm nó đi qua và một vector pháp tuyến (VTPT) của nó.

- **Định nghĩa VTPT:** Vector $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ được gọi là VTPT của mặt phẳng (P) nếu giá của nó vuông góc với (P).

- **Công thức phương trình tổng quát:** Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có VTPT $\mathbf{n}=(A; B; C)$ có phương trình là: **$\mathbf{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \Leftrightarrow Ax + By + Cz + D = 0}$** (với $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$).

Ví dụ 1: Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1; -2; 3)$ và có VTPT $\mathbf{n}=(2; 1; -4)$.

Giải: Phương trình (P) là: $2(x - 1) + 1(y - (-2)) - 4(z - 3) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 4z + 12 = 0$.

Ví dụ 2: Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB với $A(1; 0; 3)$ và $B(3; 2; 1)$.

Giải: Mặt phẳng trung trực đi qua trung điểm $I(2; 1; 2)$ của AB và có VTPT là **$\mathbf{AB}=(2; 2; -2)$** .

Phương trình là: $2(x - 2) + 2(y - 1) - 2(z - 2) = 0 \Leftrightarrow x + y - z - 1 = 0$.

2.2. Phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn

Mặt phẳng (P) cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$ với $a, b, c \neq 0$ có phương trình:

$$\mathbf{x/a + y/b + z/c = 1}$$

Ví dụ: Viết phương trình mặt phẳng đi qua các điểm $M(2; 0; 0)$, $N(0; -1; 0)$, $P(0; 0; 3)$.

Giải: Áp dụng phương trình đoạn chắn, ta có: $x/2 + y/(-1) + z/3 = 1$.

2.3. Các trường hợp đặc biệt

Đặc điểm	Phương trình
(P) đi qua gốc tọa độ O(0;0;0)	$Ax + By + Cz = 0$
(P) song song hoặc chứa trục Ox	$By + Cz + D = 0$
(P) song song hoặc chứa trục Oy	$Ax + Cz + D = 0$
(P) song song hoặc chứa trục Oz	$Ax + By + D = 0$
(P) song song với mặt phẳng (Oxy)	$Cz + D = 0$ (hoặc $z = m$)

Phần 3: Phương trình đường thẳng

3.1. Vector chỉ phương và Phương trình tham số

Một đường thẳng (d) được xác định nếu biết một điểm nó đi qua và một vector chỉ phương (VTCP) của nó.

- **Định nghĩa VTCP:** Vector $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ được gọi là VTCP của đường thẳng (d) nếu giá của nó song song hoặc trùng với (d).
- **Công thức phương trình tham số:** Đường thẳng (d) đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có VTCP $\mathbf{u}=(a; b; c)$ có phương trình là:
$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$
 (t là tham số)

Ví dụ: Viết phương trình tham số của đường thẳng (d) đi qua A(1; 2; -3) và có VTCP $\mathbf{u}=(2; -5; 1)$.

Giải: Phương trình tham số của (d) là: $\{ x = 1 + 2t; y = 2 - 5t; z = -3 + t \}$.

3.2. Phương trình chính tắc

Nếu a, b, c đều khác 0, ta có thể viết phương trình đường thẳng dưới dạng chính tắc:

$$(x - x_0)/a = (y - y_0)/b = (z - z_0)/c$$

Ví dụ: Viết phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua hai điểm A(1; -1; 2) và B(3; 1; 0).

Giải: Đường thẳng có VTCP là $\mathbf{AB}=(2; 2; -2)$, có thể chọn VTCP đơn giản hơn là $\mathbf{u}=(1; 1; -1)$.

Chọn điểm đi qua là A(1; -1; 2). Phương trình chính tắc là: $(x - 1)/1 = (y + 1)/1 = (z - 2)/(-1)$.

Phần 4: Phương trình mặt cầu

4.1. Dạng 1: Tâm và bán kính

Mặt cầu (S) có tâm I(a; b; c) và bán kính R có phương trình:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

Ví dụ: Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I(1; -2; 0) và bán kính R = 5.

Giải: Phương trình (S) là: $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + z^2 = 25$.

4.2. Dạng 2: Dạng khai triển

Phương trình có dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

- Đây là phương trình mặt cầu khi và chỉ khi $\mathbf{a^2 + b^2 + c^2 - d > 0}$.
- Khi đó, mặt cầu có tâm $I(a; b; c)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

Ví dụ: Cho phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 6z - 2 = 0$. Xác định tâm và bán kính của mặt cầu.

Giải: Ta có $-2a = 2 \Rightarrow a = -1$; $-2b = -4 \Rightarrow b = 2$; $-2c = 6 \Rightarrow c = -3$; $d = -2$.

Điều kiện: $(-1)^2 + 2^2 + (-3)^2 - (-2) = 1 + 4 + 9 + 2 = 16 > 0$.

Vậy đây là phương trình mặt cầu có tâm $I(-1; 2; -3)$ và bán kính $R = \sqrt{16} = 4$.

Phần 5: Vị trí tương đối

5.1. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng

Cho (P): $Ax + By + Cz + D = 0$ và (Q): $A'x + B'y + C'z + D' = 0$.

- **Cắt nhau:** $(A : B : C) \neq (A' : B' : C')$.
- **Song song:** $A/A' = B/B' = C/C' \neq D/D'$.
- **Trùng nhau:** $A/A' = B/B' = C/C' = D/D'$.

5.2. Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng (d) có VTCP $\mathbf{u}$ và mặt phẳng (P) có VTPT $\mathbf{n}$.

- **(d) cắt (P):** $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \neq 0$.
- **(d) song song với (P):** $\{ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ và } M_0 \notin (P) \}$ (với $M_0 \in d$).
- **(d) nằm trong (P):** $\{ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ và } M_0 \in (P) \}$ (với $M_0 \in d$).

5.3. Vị trí tương đối giữa mặt phẳng và mặt cầu

Cho mặt cầu (S) tâm I, bán kính R và mặt phẳng (P). Gọi $h = d(I, (P))$ là khoảng cách từ I đến (P).

- **(P) không cắt (S):** $h > R$.
- **(P) tiếp xúc với (S):** $h = R$. Điểm tiếp xúc là hình chiếu của I lên (P).
- **(P) cắt (S) theo một đường tròn:** $h < R$. Đường tròn giao tuyến có tâm là hình chiếu của I lên (P) và bán kính $r = \sqrt{R^2 - h^2}$.

Phần 6: Góc và Khoảng cách

6.1. Góc

- **Góc giữa hai đường thẳng (d_1, d_2):** $\cos(d_1, d_2) = |\cos(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)| = |\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2| / (|\mathbf{u}_1| \cdot |\mathbf{u}_2|)$, với $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ là VTCP.
- **Góc giữa đường thẳng (d) và mặt phẳng (P):** $\sin(d, (P)) = |\cos(\mathbf{u}, \mathbf{n})| = |\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}| / (|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{n}|)$, với $\mathbf{u}$ là VTCP của (d), $\mathbf{n}$ là VTPT của (P).
- **Góc giữa hai mặt phẳng (P_1, P_2):** $\cos((P_1), (P_2)) = |\cos(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)| = |\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2| / (|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|)$, với $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ là VTPT.

6.2. Khoảng cách

- **Khoảng cách từ điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$ đến mặt phẳng (P):** $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$d(M_0, (P)) = |Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D| / \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

- **Khoảng cách từ điểm M_1 đến đường thẳng (d) đi qua M_0 và có VTCP $\mathbf{u}$:**

$$d(M_1, d) = |[M_0M_1, u]| / |u|$$

- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau d_1 và d_2 (d_1 qua M_1 , VTCP u_1 ; d_2 qua M_2 , VTCP u_2):

$$d(d_1, d_2) = |[u_1, u_2] \cdot M_1M_2| / |[u_1, u_2]|$$

Ví dụ: Tính khoảng cách từ điểm $M(1; -1; 2)$ đến mặt phẳng (P): $2x - y + 2z + 1 = 0$.

Giải: $d(M, (P)) = |2(1) - (-1) + 2(2) + 1| / \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = |2 + 1 + 4 + 1| / \sqrt{9} = 8/3$.