

Tổng quan về bài toán cực trị hàm số bậc ba

Bài toán tìm điều kiện của tham số m để hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) thỏa mãn một điều kiện nào đó về cực trị là một dạng toán quan trọng và thường xuất hiện trong các kỳ thi. Để giải quyết dạng toán này, học sinh cần nắm vững các bước cơ bản và các trường hợp cụ thể.

I. Các bước giải chung

- 1. **Tập xác định:** $D = \mathbb{R}$.
- 2. **Tính đạo hàm:** $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.
- 3. **Xét phương trình $y' = 0$:** $3ax^2 + 2bx + c = 0$ (*). Đây là một phương trình bậc hai. Số điểm cực trị của hàm số phụ thuộc vào số nghiệm phân biệt của phương trình (*).
- 4. **Biện luận theo Δ' (hoặc Δ) của phương trình (*):** $\Delta' = b^2 - 3ac$.

Điều kiện của Δ'	Số nghiệm của $y' = 0$	Kết luận về cực trị
$\Delta' > 0$	$y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt	Hàm số có 2 điểm cực trị (1 cực đại, 1 cực tiểu)
$\Delta' \leq 0$	$y' = 0$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm	Hàm số không có cực trị

II. Các dạng bài toán thường gặp

Dạng 1: Tìm điều kiện để hàm số có hoặc không có cực trị

1. Kiến thức cần nhớ

- Hàm số có 2 điểm cực trị (cực đại và cực tiểu) $\Leftrightarrow$ Phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = b^2 - 3ac > 0$.
- Hàm số không có cực trị $\Leftrightarrow$ Phương trình $y' = 0$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = b^2 - 3ac \leq 0$.

2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 + m$ có hai điểm cực trị.

Giải:

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.
- $y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1)$.
- Để hàm số có hai điểm cực trị, phương trình $y' = 0$ phải có hai nghiệm phân biệt.
 $\Leftrightarrow 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1) = 0$ có hai nghiệm phân biệt.
 $\Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt.
- Xét $\Delta' = (-m)^2 - 1(m^2 - 1) = m^2 - m^2 + 1 = 1$.
- Vì $\Delta' = 1 > 0$ với mọi m , nên phương trình $y' = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt.
- Vậy, hàm số luôn có hai điểm cực trị với mọi giá trị của m .

Ví dụ 2: Tìm m để hàm số $y = (1/3)x^3 - (m-1)x^2 + (2m-3)x - 1$ không có cực trị.

Giải:

1. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.
2. $y' = x^2 - 2(m-1)x + (2m-3)$.
3. Hàm số không có cực trị khi phương trình $y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép.
 $\Leftrightarrow \Delta' \leq 0$.
4. $\Delta' = [-(m-1)]^2 - 1(2m-3) = m^2 - 2m + 1 - 2m + 3 = m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2$.
5. $\Delta' \leq 0 \Leftrightarrow (m-2)^2 \leq 0$.
6. Vì $(m-2)^2 \geq 0$ với mọi m, nên điều kiện $(m-2)^2 \leq 0$ chỉ xảy ra khi $(m-2)^2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$.
7. Vậy, với $m = 2$ thì hàm số không có cực trị.

Dạng 2: Điều kiện về vị trí hoành độ các điểm cực trị

1. Kiến thức cần nhớ

Giả sử hàm số có hai điểm cực trị với hoành độ là x_1, x_2 . Khi đó x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $y' = 0$. Ta áp dụng hệ thức Vi-ét:

- **Tổng hai nghiệm: $S = x_1 + x_2 = -2b / 3a$**
- **Tích hai nghiệm: $P = x_1x_2 = c / 3a$**

Một số điều kiện thường gặp:

- Hai cực trị có hoành độ dương: $\Delta' > 0, S > 0, P > 0$.

- Hai cực trị có hoành độ âm: $\Delta' > 0, S < 0, P > 0$.
- Hai cực trị có hoành độ trái dấu: $\Delta' > 0, P < 0$.
- Hai cực trị nằm về hai phía của đường thẳng $x = k$: $(x_1 - k)(x_2 - k) < 0$.

2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Tìm m để hàm số $y = (1/3)x^3 - mx^2 - x + m + 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 2$.

Giải:

1. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.
2. $y' = x^2 - 2mx - 1$.
3. Để hàm số có hai điểm cực trị, $y' = 0$ phải có hai nghiệm phân biệt.
 $\Delta' = (-m)^2 - 1(-1) = m^2 + 1$. Vì $m^2 + 1 > 0$ với mọi m nên hàm số luôn có hai điểm cực trị.
4. Theo hệ thức Vi-ét, ta có: $x_1 + x_2 = 2m$ và $x_1x_2 = -1$.
5. Theo đề bài: $x_1^2 + x_2^2 = 2$
 $\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 2$
 $\Leftrightarrow (2m)^2 - 2(-1) = 2$
 $\Leftrightarrow 4m^2 + 2 = 2$
 $\Leftrightarrow 4m^2 = 0 \Leftrightarrow m = 0$.
6. Vậy $m = 0$ là giá trị cần tìm.

Dạng 3: Bài toán về đường thẳng đi qua hai điểm cực trị

1. Kiến thức cần nhớ

Để viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị $A(x_1, y_1)$ và $B(x_2, y_2)$, ta có thể dùng phương pháp chia đa thức.

- **Thực hiện phép chia y cho y' :** $y = q(x) * y' + r(x)$, trong đó $r(x)$ là đa thức dư có bậc nhỏ hơn bậc của y' (tức là bậc 1 hoặc 0).
- Tại các điểm cực trị, $y'(x_1) = 0$ và $y'(x_2) = 0$.
- Do đó, $y_1 = q(x_1) * y'(x_1) + r(x_1) = r(x_1)$ và $y_2 = q(x_2) * y'(x_2) + r(x_2) = r(x_2)$.
- Vậy hai điểm cực trị A, B cùng nằm trên đồ thị hàm số $y = r(x)$.
- Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là **$y = r(x)$** .

2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

Giải:

1. $y' = 3x^2 - 6x$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 3x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=2$. Hàm số có hai điểm cực trị.
2. Thực hiện phép chia y cho y' :
 $(x^3 - 3x^2 + 2) : (3x^2 - 6x)$
3. Ta có: $y = (1/3 * x - 1/3) * y' - 2x + 2$.
Vậy đa thức dư là $r(x) = -2x + 2$.
4. Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là $y = -2x + 2$.

Ví dụ 2: Tìm m để hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx + 2$ nằm trên đường thẳng $y = x + 2$.

Giải:

1. $y' = 3x^2 - 3m$. Để hàm số có 2 cực trị, $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 3x^2 = 3m$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0$.
2. Thực hiện phép chia y cho y' :
$$y = (1/3 * x) * (3x^2 - 3m) - 2mx + 2.$$
3. Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là $d: y = -2mx + 2$.
4. Để hai điểm cực trị nằm trên đường thẳng $y = x + 2$, đường thẳng d phải trùng với đường thẳng $y = x + 2$.
5. Điều này xảy ra khi: $\{-2m = 1, 2 = 2\} \Leftrightarrow m = -1/2$.
6. Kết hợp với điều kiện $m > 0$, ta thấy không có giá trị m nào thỏa mãn.

Dạng 4: Điều kiện về giá trị cực trị và khoảng cách

1. Kiến thức cần nhớ

Giả sử hai điểm cực trị là $A(x_1, y_1)$ và $B(x_2, y_2)$.

- Hai cực trị nằm về hai phía trục $Ox \Leftrightarrow y_1 * y_2 < 0$.
- Hai cực trị nằm về cùng một phía trục $Ox \Leftrightarrow y_1 * y_2 > 0$.
- Khoảng cách giữa hai điểm cực trị: $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành.

Giải:

1. $y' = 3x^2 - 6x$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 3x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=2$.
2. Hàm số luôn có hai điểm cực trị với mọi m . hoành độ các điểm cực trị là $x_1 = 0, x_2 = 2$.
3. Tung độ các điểm cực trị:
 $y_1 = y(0) = m$
 $y_2 = y(2) = 2^3 - 3(2)^2 + m = 8 - 12 + m = m - 4$.
4. Hai điểm cực trị nằm về hai phía trục $Ox \Leftrightarrow y_1 * y_2 < 0$.
 $\Leftrightarrow m(m - 4) < 0$.
 $\Leftrightarrow 0 < m < 4$.
5. Vậy $0 < m < 4$ là các giá trị cần tìm.