Tổng hợp kiến thức Bất đẳng thức Cô-si và Bunhiacopxki

Bất đẳng thức là một trong những chuyên đề quan trọng và thú vị nhất trong chương trình Toán học phổ thông. Trong đó, bất đẳng thức Cô-si (AM-GM) và bất đẳng thức Bunhiacopxki (Cauchy-Schwarz) là hai công cụ nền tảng và mạnh mẽ nhất, xuất hiện xuyên suốt từ lớp 10 đến các kỳ thi học sinh giỏi và tuyển sinh đại học. Tài liệu này sẽ hệ thống hóa một cách đầy đủ và chi tiết kiến thức về hai bất đẳng thức này.

I. Bất đẳng thức Cô-si (AM-GM)

Bất đẳng thức Cô-si, còn có tên gọi quốc tế là bất đẳng thức AM-GM (Arithmetic Mean - Geometric Mean), là bất đẳng thức so sánh giữa trung bình cộng và trung bình nhân của các số **không âm**.

1. Bất đẳng thức Cô-si cho 2 số không âm

- **Công thức:** Với hai số không âm a, b, ta luôn có: **(a + b)/2 ≥ √ab** hoặc **a + b ≥ 2√ab**.
- **Giải thích:** Trung bình cộng của hai số không âm luôn lớn hơn hoặc bằng trung bình nhân của chúng.
- **Dấu "=" xảy ra khi:a = b**.

Ví dụ minh họa:

1. **Ví dụ 1:** Cho x, y là các số dương. Chứng minh rằng: (x + y)(1/x + 1/y) ≥ 4.

   Lời giải:

   Áp dụng Bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương x và y, ta có:

   x + y ≥ 2√xy (1)

   Áp dụng Bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương 1/x và 1/y, ta có:

   1/x + 1/y ≥ 2√(1/(xy)) (2)

   Vì cả hai vế của (1) và (2) đều dương, ta nhân vế theo vế:

   (x + y)(1/x + 1/y) ≥ 2√xy * 2√(1/(xy)) = 4√(xy * 1/(xy)) = 4

   Vậy (x + y)(1/x + 1/y) ≥ 4. Dấu "=" xảy ra khi x = y.

2. **Ví dụ 2:** Tìm giá trị nhỏ nhất (GTNN) của biểu thức A = x + 9/x với x > 0.

   Lời giải:

   Vì x > 0 nên 9/x cũng là số dương. Áp dụng Bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương x và 9/x, ta có:

   A = x + 9/x ≥ 2√(x * 9/x) = 2√9 = 2 * 3 = 6.

   Vậy GTNN của A là 6. Dấu "=" xảy ra khi x = 9/x ⇔ x² = 9 ⇔ x = 3 (vì x > 0).

2. Bất đẳng thức Cô-si cho 3 số không âm

- **Công thức:** Với ba số không âm a, b, c, ta luôn có: **(a + b + c)/3 ≥ ³√(abc)** hoặc **a + b + c ≥ 3³√(abc)**.

VIDOCU.COM

- **Giải thích:** Trung bình cộng của ba số không âm luôn lớn hơn hoặc bằng trung bình nhân của chúng.
- **Dấu "=" xảy ra khi:a = b = c**.

Ví dụ minh họa:

1. **Ví dụ 1:** Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng (a + b + c)(1/a + 1/b + 1/c) ≥ 9.

   Lời giải:

   Áp dụng Bất đẳng thức Cô-si cho ba số dương a, b, c, ta có:

   a + b + c ≥ $3\sqrt[3]{(abc)}$ (1)

   Áp dụng Bất đẳng thức Cô-si cho ba số dương 1/a, 1/b, 1/c, ta có:

   1/a + 1/b + 1/c ≥ $3\sqrt[3]{(1/(abc))}$ (2)

   Nhân vế theo vế của (1) và (2) (do các vế đều dương), ta được:

   (a + b + c)(1/a + 1/b + 1/c) ≥ $3\sqrt[3]{(abc)} * 3\sqrt[3]{(1/(abc))} = 9$

   Dấu "=" xảy ra khi a = b = c.

2. **Ví dụ 2:** Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng: $a^3/b + b^3/c + c^3/a \geq ab + bc + ca$.

   Lời giải:

   Áp dụng BĐT Cô-si cho 2 số dương, ta có:

   $a^3/b + ab \geq 2\sqrt{(a^3/b * ab)} = 2\sqrt{(a^4)} = 2a^2$

   $b^3/c + bc \geq 2\sqrt{(b^3/c * bc)} = 2\sqrt{(b^4)} = 2b^2$

VIDOCU.COM

$c^3/a + ca \geq 2\sqrt{(c^3/a * ca)} = 2\sqrt{(c^4)} = 2c^2$

Cộng vế theo vế ba bất đẳng thức trên:

$a^3/b + b^3/c + c^3/a + (ab + bc + ca) \geq 2(a^2 + b^2 + c^2)$

$\Rightarrow a^3/b + b^3/c + c^3/a \geq 2(a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ca)$

Mặt khác, ta có một BĐT quen thuộc: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ (chứng minh bằng cách nhân 2 vế với 2 và chuyển vế thành $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$).

Do đó: $2(a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ca) = (a^2 + b^2 + c^2) + (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \geq ab + bc + ca$.

Từ đó suy ra điều phải chứng minh. Dấu "=" xảy ra khi a = b = c.

3. Bất đẳng thức Cô-si cho n số không âm (Dạng tổng quát)

- **Công thức:** Với n số không âm $a_1, a_2, ..., a_n$, ta có: $\mathbf{(a_1 + a_2 + ... + a_n)/n \geq \sqrt[n]{(a_1a_2...a_n)}}$.
- **Dấu "=" xảy ra khi:$\mathbf{a_1 = a_2 = ... = a_n}$.**

4. Các hệ quả và kỹ thuật áp dụng

a. Mối quan hệ giữa Tổng và Tích

- Nếu các số dương có tổng không đổi (S), thì tích của chúng (P) đạt giá trị lớn nhất khi các số đó bằng nhau.
- Nếu các số dương có tích không đổi (P), thì tổng của chúng (S) đạt giá trị nhỏ nhất khi các số đó bằng nhau.

VIDOCU.COM

Ví dụ: Tìm hai số dương có tổng bằng 20 sao cho tích của chúng là lớn nhất.

Lời giải: Gọi hai số đó là a và b (a, b > 0). Ta có a + b = 20. Cần tìm GTLN của P = ab. Theo BĐT Cô-si: a + b ≥ 2√ab ⇒ 20 ≥ 2√ab ⇒ 10 ≥ √ab ⇒ ab ≤ 100. Vậy GTLN của P là 100, đạt được khi a = b = 10.

b. Kỹ thuật "chọn điểm rơi"

Đây là kỹ thuật dùng để tìm GTNN, GTLN khi dấu "=" của BĐT Cô-si không xảy ra tại các giá trị bằng nhau của biến số ban đầu. Ta cần biến đổi biểu thức để các số hạng áp dụng BĐT Cô-si bằng nhau tại điểm mà ta dự đoán là cực trị.

Ví dụ: Tìm GTNN của biểu thức A = x + 1/(x-2) với x > 2.

Lời giải:

Ta dự đoán GTNN đạt được khi x-2 và 1/(x-2) bằng nhau, tức là $(x-2)^2 = 1 \Rightarrow x-2 = 1 \Rightarrow x = 3$.

Để áp dụng Cô-si, ta cần tạo ra số hạng (x-2). Ta viết lại biểu thức A như sau:

A = (x - 2) + 1/(x - 2) + 2

Vì x > 2 nên x-2 > 0. Áp dụng BĐT Cô-si cho hai số dương (x-2) và 1/(x-2):

(x - 2) + 1/(x - 2) ≥ 2√((x - 2) * 1/(x - 2)) = 2.

Do đó, A ≥ 2 + 2 = 4.

Vậy GTNN của A là 4. Dấu "=" xảy ra khi $x - 2 = 1/(x - 2) \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 1 \Leftrightarrow x = 3$ (thỏa mãn x > 2).

VIDOCU.COM

II. Bất đẳng thức Bunhiacopxki (Cauchy-Schwarz)

Bất đẳng thức Bunhiacopxki (tên quốc tế là Cauchy-Schwarz) là một bất đẳng thức quan trọng dùng để đánh giá mối quan hệ giữa tổng các bình phương và bình phương của tổng. Bất đẳng thức này áp dụng cho các bộ số **thực bất kỳ**.

1. Bất đẳng thức Bunhiacopxki cho hai cặp số

- **Công thức:** Với hai cặp số thực (a, b) và (x, y), ta có: **$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$**.
- **Giải thích:** Tích của tổng các bình phương của hai bộ số luôn lớn hơn hoặc bằng bình phương của tổng các tích tương ứng.
- **Dấu "=" xảy ra khi:a/x = b/y** (với quy ước nếu mẫu bằng 0 thì tử cũng bằng 0).

Ví dụ minh họa:

1. **Ví dụ 1:** Cho các số thực x, y thỏa mãn 3x + 4y = 10. Tìm GTNN của biểu thức P = $x^2 + y^2$.

   Lời giải:

   Áp dụng BĐT Bunhiacopxki cho hai bộ số (3, 4) và (x, y):

   $(3^2 + 4^2)(x^2 + y^2) \geq (3x + 4y)^2$

   $\Leftrightarrow (9 + 16)(x^2 + y^2) \geq 10^2$

   $\Leftrightarrow 25 * P \geq 100$

   $\Leftrightarrow P \geq 4$

VIDOCU.COM

Vậy GTNN của P là 4. Dấu "=" xảy ra khi x/3 = y/4. Kết hợp với 3x + 4y = 10, ta giải hệ và được x = 6/5, y = 8/5.

2. **Ví dụ 2:** Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x^2 + y^2 = 1$. Tìm GTLN và GTNN của biểu thức F = x + 3y.

   Lời giải:

   Áp dụng BĐT Bunhiacopxki cho hai bộ số (1, 3) và (x, y):

   $(1^2 + 3^2)(x^2 + y^2) \geq (1*x + 3*y)^2$

   $\Leftrightarrow (1 + 9)(1) \geq F^2$

   $\Leftrightarrow 10 \geq F^2$

   $\Leftrightarrow -\sqrt{10} \leq F \leq \sqrt{10}$

   Vậy GTLN của F là $\sqrt{10}$ và GTNN của F là $-\sqrt{10}$.

2. Bất đẳng thức Bunhiacopxki cho n cặp số (Dạng tổng quát)

- **Công thức:** Với hai bộ n số thực $(a_1, a_2, ..., a_n)$ và $(b_1, b_2, ..., b_n)$, ta có:**$(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2$**
- **Dấu "=" xảy ra khi:$a_1/b_1 = a_2/b_2 = ... = a_n/b_n$** (với quy ước nếu mẫu bằng 0 thì tử cũng bằng 0).

3. Dạng cộng mẫu (Bất đẳng thức Schwarz)

Đây là một hệ quả trực tiếp của BĐT Bunhiacopxki, rất hữu ích trong việc chứng minh các BĐT có dạng phân thức.

VIDOCU.COM

- **Công thức:** Với các số thực $x_1, x_2, ..., x_n$ và các số thực dương $a_1, a_2, ..., a_n$, ta có:**$x_1^2/a_1 + x_2^2/a_2 + ... + x_n^2/a_n \geq (x_1 + x_2 + ... + x_n)^2 / (a_1 + a_2 + ... + a_n)$**
- **Dấu "=" xảy ra khi:$x_1/a_1 = x_2/a_2 = ... = x_n/a_n$.**

Ví dụ minh họa:

1. **Ví dụ 1:** Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng: $1/a + 1/b + 1/c \geq 9/(a+b+c)$.

   Lời giải:

   Ta viết lại vế trái: $1/a + 1/b + 1/c = 1^2/a + 1^2/b + 1^2/c$.

   Áp dụng BĐT Schwarz với $x_1=1, x_2=1, x_3=1$ và $a_1=a, a_2=b, a_3=c$, ta có:

   $1^2/a + 1^2/b + 1^2/c \geq (1 + 1 + 1)^2 / (a + b + c) = 9 / (a + b + c)$.

   Dấu "=" xảy ra khi $1/a = 1/b = 1/c \Leftrightarrow a = b = c$.

2. **Ví dụ 2:** Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh: $a^2/(b+c) + b^2/(c+a) + c^2/(a+b) \geq (a+b+c)/2$.

   Lời giải:

   Áp dụng BĐT Schwarz với $x_1=a, x_2=b, x_3=c$ và các mẫu số tương ứng là $a_1=b+c, a_2=c+a, a_3=a+b$ (đều là các số dương), ta có:

   $a^2/(b+c) + b^2/(c+a) + c^2/(a+b) \geq (a+b+c)^2 / ((b+c) + (c+a) + (a+b))$

   $\Leftrightarrow a^2/(b+c) + b^2/(c+a) + c^2/(a+b) \geq (a+b+c)^2 / (2a + 2b + 2c)$

   $\Leftrightarrow a^2/(b+c) + b^2/(c+a) + c^2/(a+b) \geq (a+b+c)^2 / 2(a+b+c) = (a+b+c)/2$.

VIDOCU.COM

Dấu "=" xảy ra khi a/(b+c) = b/(c+a) = c/(a+b) ⇔ a = b = c.

III. Bảng so sánh nhanh BĐT Cô-si và Bunhiacopxki

Tiêu chí	Bất đẳng thức Cô-si (AM-GM)	Bất đẳng thức Bunhiacopxki (Cauchy-Schwarz)
Điều kiện áp dụng	Các số phải **không âm**.	Các số là số **thực bất kỳ**.
Dạng cơ bản (2 số/cặp)	$a + b \geq 2\sqrt{ab}$	$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$
Bản chất	So sánh trung bình cộng và trung bình nhân.	So sánh tích của tổng các bình phương với bình phương của tổng các tích.
Dấu "=" xảy ra	Khi các số bằng nhau (a = b = c = ...).	Khi các bộ số tỉ lệ với nhau (a/x = b/y = ...).
Ứng dụng chính	Tìm GTLN, GTNN khi biết tổng hoặc tích không đổi. Chứng minh BĐT liên quan đến tổng và tích.	Tìm GTLN, GTNN khi có điều kiện ràng buộc dạng tuyến tính hoặc tổng bình phương. Chứng minh BĐT liên quan đến tổng bình phương.

IV. Lời kết

Nắm vững công thức, điều kiện áp dụng, và dấu bằng xảy ra của hai bất đẳng thức Cô-si và Bunhiacopxki là chìa khóa để giải quyết một lớp bài toán rất lớn về bất đẳng thức và tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất. Điều quan trọng nhất là luyện tập thường xuyên qua nhiều dạng bài tập khác nhau để hình thành kỹ năng nhận dạng và biến đổi linh hoạt. Chúc các bạn học tốt!

VIDOCU.COM