

Chuyên đề: Tính chất cơ bản và rút gọn phân số

I. Kiến thức cần nhớ

1. Định nghĩa phân số

Người ta gọi $\frac{a}{b}$ với a, b là các số nguyên và $b \neq 0$ là một phân số. Trong đó, a là tử số (tử) và b là mẫu số (mẫu) của phân số.

- **Ví dụ 1:** $\frac{3}{4}$ là một phân số, có tử số là 3 và mẫu số là 4.
- **Ví dụ 2:** $-\frac{5}{9}$ là một phân số, có tử số là -5 và mẫu số là 9.
- **Ví dụ 3:** Mọi số nguyên a đều có thể viết dưới dạng phân số với mẫu số là 1:
 $a = \frac{a}{1}$. Ví dụ: $7 = \frac{7}{1}$.

2. Hai phân số bằng nhau

Hai phân số $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$ được gọi là bằng nhau nếu tích của tử phân số này và mẫu phân số kia bằng nhau.

Công thức: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ nếu $a.d = b.c$

- **Ví dụ 1:** Kiểm tra xem phân số $\frac{2}{5}$ có bằng $\frac{8}{20}$ không?

Ta xét tích: $2 \cdot 20 = 40$ và $5 \cdot 8 = 40$.

Vì $2 \cdot 20 = 5 \cdot 8$ nên $\frac{2}{5} = \frac{8}{20}$.

- **Ví dụ 2:** Kiểm tra xem phân số $-\frac{3}{7}$ có bằng $\frac{9}{-21}$ không?

Ta xét tích: $(-3) \cdot (-21) = 63$ và $7 \cdot 9 = 63$.

Vì $(-3) \cdot (-21) = 7 \cdot 9$ nên $-3/7 = 9/-21$.

- **Ví dụ 3:** Tìm số nguyên x , biết $x/4 = 21/28$.

Vì $x/4 = 21/28$ nên $x \cdot 28 = 4 \cdot 21$.

$$x \cdot 28 = 84$$

$$x = 84 : 28$$

$$x = 3$$

3. Tính chất cơ bản của phân số

Tính chất cơ bản của phân số là công cụ quan trọng để biến đổi các phân số, giúp chúng ta thực hiện các phép toán dễ dàng hơn.

a. Tính chất 1: Nhân cả tử và mẫu với cùng một số

Nếu ta nhân cả tử và mẫu của một phân số với cùng một số nguyên khác 0 thì ta được một phân số mới bằng phân số đã cho.

Công thức: $a/b = (a \cdot m)/(b \cdot m)$ (với m là số nguyên, $m \neq 0$)

- **Ví dụ 1:** $2/7 = (2 \cdot 3)/(7 \cdot 3) = 6/21$.

- **Ví dụ 2:** $-4/9 = (-4 \cdot 5)/(9 \cdot 5) = -20/45$.

b. Tính chất 2: Chia cả tử và mẫu cho cùng một ước chung

Nếu ta chia cả tử và mẫu của một phân số cho cùng một ước chung của chúng thì ta được một phân số mới bằng phân số đã cho. Đây chính là cơ sở của việc rút gọn phân số.

Công thức: $a/b = (a:n)/(b:n)$ (với n là ước chung của a và b , $n \neq 0$)

- **Ví dụ 1:** $12/30 = (12:6)/(30:6) = 2/5$ (vì 6 là ước chung của 12 và 30).
- **Ví dụ 2:** $-18/27 = (-18:9)/(27:9) = -2/3$ (vì 9 là ước chung của -18 và 27).

c. Áp dụng: Viết phân số có mẫu âm thành mẫu dương

Dựa vào tính chất 1, ta có thể viết một phân số bất kỳ có mẫu âm thành một phân số bằng nó và có mẫu dương bằng cách nhân cả tử và mẫu với (-1).

Công thức: $a/(-b) = (a \cdot (-1))/((-b) \cdot (-1)) = -a/b$

- **Ví dụ 1:** $5/-13 = (5 \cdot (-1))/((-13) \cdot (-1)) = -5/13$.
- **Ví dụ 2:** $-4/-9 = (-4 \cdot (-1))/((-9) \cdot (-1)) = 4/9$.

4. Rút gọn phân số

a. Khái niệm

Rút gọn phân số là biến đổi phân số đã cho thành một phân số mới đơn giản hơn nhưng vẫn bằng nó, bằng cách chia cả tử và mẫu cho một ước chung khác 1 và -1 của chúng.

b. Quy tắc rút gọn phân số

Để rút gọn một phân số, ta thực hiện các bước sau:

1. Tìm một ước chung (khác 1 và -1) của tử và mẫu.
2. Chia cả tử và mẫu của phân số cho ước chung đó.
3. Lặp lại các bước trên cho đến khi nhận được phân số tối giản (không thể rút gọn được nữa).

- **Ví dụ 1:** Rút gọn phân số $24/36$.

Ta thấy 24 và 36 cùng chia hết cho 2: $24/36 = (24:2)/(36:2) = 12/18$.

Ta thấy 12 và 18 cùng chia hết cho 6: $12/18 = (12:6)/(18:6) = 2/3$.

Phân số $2/3$ không thể rút gọn được nữa. Vậy $24/36 = 2/3$.

- **Ví dụ 2:** Rút gọn phân số $-50/75$.

Ta thấy 50 và 75 có chữ số tận cùng là 0 và 5 nên cùng chia hết cho 5: $-50/75 = (-50:5)/(75:5) = -10/15$.

Ta thấy -10 và 15 cùng chia hết cho 5: $-10/15 = (-10:5)/(15:5) = -2/3$.

Phân số $-2/3$ không thể rút gọn được nữa. Vậy $-50/75 = -2/3$.

5. Phân số tối giản

a. Định nghĩa

Phân số tối giản (hay phân số không rút gọn được nữa) là phân số mà tử và mẫu chỉ có ước chung là 1 và -1.

Nói cách khác, phân số a/b là tối giản nếu $\text{ƯCLN}(|a|, |b|) = 1$.

- **Ví dụ 1:** Phân số $4/5$ là phân số tối giản vì $\text{ƯCLN}(4, 5) = 1$.
- **Ví dụ 2:** Phân số $-11/13$ là phân số tối giản vì $\text{ƯCLN}(11, 13) = 1$.
- **Ví dụ 3:** Phân số $6/9$ không phải là phân số tối giản vì $\text{ƯCLN}(6, 9) = 3 \neq 1$.

b. Cách rút gọn về phân số tối giản

Để rút gọn một phân số về dạng tối giản một cách nhanh nhất, ta chia cả tử và mẫu của phân số đó cho ước chung lớn nhất (ƯCLN) của chúng.

Các bước thực hiện:

1. Tìm ƯCLN của giá trị tuyệt đối của tử và mẫu.

2. Chia cả tử và mẫu cho ƯCLN vừa tìm được.

- **Ví dụ 1:** Rút gọn phân số $28/42$ về tối giản.

Bước 1: Tìm ƯCLN(28, 42).

Phân tích ra thừa số nguyên tố: $28 = 2^2 \cdot 7$; $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$.

$$\text{ƯCLN}(28, 42) = 2 \cdot 7 = 14.$$

Bước 2: Chia cả tử và mẫu cho 14.

$$28/42 = (28:14)/(42:14) = 2/3.$$

- **Ví dụ 2:** Rút gọn phân số $-72/90$ về tối giản.

Bước 1: Tìm ƯCLN(72, 90).

Phân tích ra thừa số nguyên tố: $72 = 2^3 \cdot 3^2$; $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$.

$$\text{ƯCLN}(72, 90) = 2 \cdot 3^2 = 18.$$

Bước 2: Chia cả tử và mẫu cho 18.

$$-72/90 = (-72:18)/(90:18) = -4/5.$$

II. Bài tập vận dụng

Bài 1: Trong các phân số sau, tìm các cặp phân số bằng nhau.

$3/4$; $-6/8$; $15/20$; $-12/-16$; $9/15$

Lời giải:

- Ta rút gọn các phân số về dạng tối giản:

- $-6/8 = (-6:2)/(8:2) = -3/4$
- $15/20 = (15:5)/(20:5) = 3/4$
- $-12/-16 = (-12:(-4))/(-16:(-4)) = 3/4$
- $9/15 = (9:3)/(15:3) = 3/5$
- Vậy các cặp phân số bằng nhau là: $3/4 = 15/20 = -12/-16$.

Bài 2: Rút gọn các phân số sau về tối giản.

a) $45/105$

b) $-63/81$

c) $35/-140$

Lời giải:

- a) Tìm ƯCLN(45, 105). Ta có $45 = 3^2 \cdot 5$; $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$. Vậy ƯCLN(45, 105) = $3 \cdot 5 = 15$.
- $45/105 = (45:15)/(105:15) = 3/7$.
- b) Tìm ƯCLN(63, 81). Ta có $63 = 3^2 \cdot 7$; $81 = 3^4$. Vậy ƯCLN(63, 81) = $3^2 = 9$.
- $-63/81 = (-63:9)/(81:9) = -7/9$.
- c) Tìm ƯCLN(35, 140). Ta có $35 = 5 \cdot 7$; $140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$. Vậy ƯCLN(35, 140) = $5 \cdot 7 = 35$.
- $35/-140 = (35:35)/(-140:35) = 1/-4 = -1/4$.

Bài 3: Tìm số nguyên y biết:

$$-2/y = 14/35$$

Lời giải:

Cách 1: Áp dụng định nghĩa hai phân số bằng nhau.

Vì $-2/y = 14/35$ nên $(-2) \cdot 35 = y \cdot 14$.

$$-70 = y \cdot 14$$

$$y = -70 : 14$$

$$y = -5$$

Cách 2: Rút gọn rồi tìm y.

Ta rút gọn phân số $14/35 = (14:7)/(35:7) = 2/5$.

Ta có: $-2/y = 2/5$. Ta thấy tử số $-2 = 2 \cdot (-1)$, vậy mẫu số $y = 5 \cdot (-1) = -5$.

Vậy **y = -5**.