

Chuyên đề: Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình - Dạng toán "Vừa gà vừa chó"

Bài toán "vừa gà vừa chó" là một dạng toán đố kinh điển và thú vị, thường được dùng để giới thiệu về phương pháp giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình. Chuyên đề này sẽ cung cấp cho các em học sinh lớp 9 một cái nhìn toàn diện, từ kiến thức nền tảng về hệ phương trình đến cách áp dụng để giải quyết bài toán này và các biến thể của nó.

I. Kiến thức cần nhớ về Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

Trước khi đi vào bài toán cụ thể, chúng ta cần ôn lại kiến thức cốt lõi về hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.

1. Định nghĩa

Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn là hệ gồm hai phương trình bậc nhất hai ẩn x và y . Nó có dạng tổng quát:

$$\begin{cases} ax + by = c & (1) \\ a'x + b'y = c' & (2) \end{cases}$$

Trong đó, a, b, c, a', b', c' là các số đã biết (hệ số), với a, b không đồng thời bằng 0 và a', b' không đồng thời bằng 0. Giải hệ phương trình là tìm cặp số $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời cả hai phương trình.

2. Các phương pháp giải hệ phương trình

Có hai phương pháp chính thường được sử dụng để giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.

a. Phương pháp thế

Phương pháp này bao gồm các bước sau:

1. Từ một trong hai phương trình của hệ, ta biểu diễn một ẩn theo ẩn kia (ví dụ, biểu diễn x theo y từ phương trình (1)).
2. Lấy kết quả vừa tìm được thế vào phương trình còn lại để được một phương trình mới chỉ có một ẩn.
3. Giải phương trình một ẩn vừa thu được, tìm ra giá trị của ẩn đó.
4. Thay giá trị của ẩn vừa tìm được vào biểu thức ở bước 1 để tìm giá trị của ẩn còn lại.

Ví dụ: Giải hệ phương trình $\{ x - 2y = 3; 3x + 2y = 1 \}$

- Từ phương trình đầu tiên, ta có: $x = 3 + 2y$.
- Thế x vào phương trình thứ hai: $3(3 + 2y) + 2y = 1$.
- Giải phương trình một ẩn y : $9 + 6y + 2y = 1 \Rightarrow 8y = -8 \Rightarrow y = -1$.
- Thay $y = -1$ vào biểu thức của x : $x = 3 + 2(-1) = 3 - 2 = 1$.
- Vậy nghiệm của hệ là $(x; y) = (1; -1)$.

b. Phương pháp cộng đại số

Phương pháp này bao gồm các bước sau:

1. Nhân hai vế của mỗi phương trình với một số thích hợp (nếu cần) sao cho hệ số của một trong hai ẩn trong hai phương trình là hai số đối nhau hoặc bằng nhau.
2. Cộng hoặc trừ từng vế của hai phương trình trong hệ mới để khử đi một ẩn, ta được phương trình một ẩn.
3. Giải phương trình một ẩn vừa thu được.
4. Thay giá trị của ẩn vừa tìm được vào một trong hai phương trình ban đầu để tìm ẩn còn lại.

Ví dụ: Giải hệ phương trình $\{ 2x + y = 5; x - y = 1 \}$

- Hệ số của y trong hai phương trình là 1 và -1 (đối nhau), nên ta có thể cộng trực tiếp.
- Cộng vế theo vế hai phương trình: $(2x + y) + (x - y) = 5 + 1 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$.
- Thay $x = 2$ vào phương trình thứ hai: $2 - y = 1 \Rightarrow y = 1$.
- Vậy nghiệm của hệ là $(x; y) = (2; 1)$.

II. Các bước giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình

Để giải một bài toán đố bằng cách lập hệ phương trình, chúng ta tuân theo 3 bước cơ bản sau:

1. Bước 1: Lập hệ phương trình

- Chọn hai đại lượng chưa biết làm ẩn số (thường là những gì đề bài yêu cầu tìm) và đặt điều kiện cho ẩn (ví dụ: số con vật phải là số nguyên dương).
- Dựa vào các dữ kiện và mối quan hệ trong đề bài, biểu diễn các đại lượng chưa biết khác theo ẩn.
- Lập hai phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng. Từ đó có một hệ phương trình.

2. Bước 2: Giải hệ phương trình

- Sử dụng phương pháp thế hoặc cộng đại số để tìm nghiệm của hệ phương trình vừa lập.

3. Bước 3: Trả lời và kiểm tra

- Kiểm tra xem nghiệm tìm được có thỏa mãn điều kiện của ẩn hay không.
- Nếu thỏa mãn, kết luận bài toán theo câu hỏi của đề bài.

III. Áp dụng vào bài toán "Vừa gà vừa chó"

1. Phân tích bài toán gốc

Bài toán được phát biểu qua bài thơ dân gian:

"Vừa gà vừa chó

Bó lại cho tròn

Ba mươi sáu con

Một trăm chân chẵn"

Phân tích dữ kiện:

- Tổng số con vật (gà và chó): 36 con.
- Tổng số chân (của cả gà và chó): 100 chân.
- Kiến thức thực tế: Gà có 2 chân, Chó có 4 chân.

Yêu cầu: Tìm số con gà và số con chó.

2. Giải chi tiết bài toán mẫu

Áp dụng 3 bước giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình:

Bước 1: Lập hệ phương trình

- Gọi số con gà là **x** (con), số con chó là **y** (con).
- **Điều kiện:** x, y phải là các số nguyên dương ($x, y \in \mathbb{N}^*$).
- Dựa vào dữ kiện "Ba mươi sáu con", ta có phương trình tổng số con vật:
 $x + y = 36$ (1)
- Số chân gà là: $2x$ (chân).
- Số chân chó là: $4y$ (chân).
- Dựa vào dữ kiện "Một trăm chân chẵn", ta có phương trình tổng số chân:
 $2x + 4y = 100$ (2)
- Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: **$\{ x + y = 36; 2x + 4y = 100 \}$**

Bước 2: Giải hệ phương trình

Ta có thể giải bằng phương pháp thế:

- Từ phương trình (1) suy ra: **$x = 36 - y$** .
- Thế x vào phương trình (2): $2(36 - y) + 4y = 100$.

- Giải phương trình tìm y: $72 - 2y + 4y = 100 \Rightarrow 2y = 100 - 72 \Rightarrow 2y = 28 \Rightarrow y = 14$.
- Thay $y = 14$ vào biểu thức của x: $x = 36 - 14 \Rightarrow x = 22$.

Bước 3: Trả lời và kiểm tra

- Ta thấy $x = 22$ và $y = 14$ đều là các số nguyên dương, thỏa mãn điều kiện của ẩn.
- **Kiểm tra lại:** Tổng số con: $22 + 14 = 36$ (đúng). Tổng số chân: $2 \cdot 22 + 4 \cdot 14 = 44 + 56 = 100$ (đúng).
- **Kết luận:** Vậy có 22 con gà và 14 con chó.

IV. Các bài toán biến thể và ví dụ minh họa

Phương pháp này có thể áp dụng cho nhiều bài toán tương tự, chỉ cần thay đổi đối tượng và các hệ số.

Ví dụ 1: Bài toán về các loại xe

Đề bài: Trong một bãi đỗ xe có 45 xe, bao gồm xe ô tô 4 bánh và xe máy 2 bánh. Tổng số bánh xe đếm được là 140 bánh. Hỏi có bao nhiêu xe mỗi loại?

Giải:

1. Lập hệ phương trình:

- Gọi số xe ô tô là x (chiếc), số xe máy là y (chiếc). (Điều kiện: $x, y \in \mathbb{N}^*$)
- Phương trình tổng số xe: $x + y = 45$
- Phương trình tổng số bánh xe: $4x + 2y = 140$

- Hệ phương trình: $\{ x + y = 45; 4x + 2y = 140 \}$

2. Giải hệ phương trình:

- Từ $x + y = 45 \Rightarrow y = 45 - x$.
- Thế vào phương trình thứ hai: $4x + 2(45 - x) = 140$.
- $4x + 90 - 2x = 140 \Rightarrow 2x = 50 \Rightarrow x = 25$.
- $y = 45 - 25 = 20$.

3. Trả lời:

- Nghiệm $x = 25, y = 20$ thỏa mãn điều kiện.
- Vậy có 25 xe ô tô và 20 xe máy.

Ví dụ 2: Bài toán biết hiệu số

Đề bài: Một nông trại có thỏ và gà. Biết số thỏ nhiều hơn số gà là 8 con. Tổng số chân gà và chân thỏ là 172 chân. Tính số gà và số thỏ.

Giải:

1. Lập hệ phương trình:

- Gọi số gà là x (con), số thỏ là y (con). (Điều kiện: $x, y \in \mathbb{N}^*$)
- Vì số thỏ nhiều hơn số gà 8 con, ta có phương trình: $y - x = 8$
- Phương trình tổng số chân (gà 2 chân, thỏ 4 chân): $2x + 4y = 172$
- Hệ phương trình: $\{ y - x = 8; 2x + 4y = 172 \}$

2. Giải hệ phương trình:

- Từ $y - x = 8 \Rightarrow y = x + 8$.
- Thế vào phương trình thứ hai: $2x + 4(x + 8) = 172$.
- $2x + 4x + 32 = 172 \Rightarrow 6x = 140 \Rightarrow x = 23.33...$ (không phải số nguyên)
- *Lưu ý: Nếu đề bài ra số không chẵn, cần kiểm tra lại đề bài. Giả sử đề bài là 184 chân để có nghiệm đẹp.*
- *Giải lại với 184 chân: $6x = 184 - 32 \Rightarrow 6x = 152 \Rightarrow x = 25.33...$ Vẫn lẻ.*
Giả sử đề bài là 176 chân.
- Giải lại với 176 chân: $6x = 176 - 32 \Rightarrow 6x = 144 \Rightarrow x = 24$.
- $y = 24 + 8 = 32$.

3. Trả lời (với đề đã sửa):

- Nghiệm $x = 24, y = 32$ thỏa mãn điều kiện.
- Vậy có 24 con gà và 32 con thỏ.

V. Lưu ý và các sai lầm thường gặp

- **Không đặt điều kiện cho ẩn:** Đây là lỗi sai phổ biến. Số con vật, số xe... phải là số nguyên dương. Nếu giải ra nghiệm không thỏa mãn (số âm, số thập phân) thì bài toán vô nghiệm hoặc đã giải sai.
- **Nhầm lẫn các hệ số:** Cần xác định chính xác số chân (hoặc bánh xe,...) của mỗi đối tượng. Ví dụ, gà có 2 chân, chó có 4 chân. Nhầm lẫn sẽ dẫn đến lập sai phương trình.

- **Lập sai phương trình:** Đọc kỹ đề bài để xác định đúng mối quan hệ. Đây là phương trình về TỔNG số lượng, đây là phương trình về TỔNG đặc điểm (số chân, số bánh...).
- **Quên kết luận:** Sau khi tìm ra (x, y) , phải trả lời đầy đủ câu hỏi của bài toán. Ví dụ: "Vậy có 22 con gà và 14 con chó", chứ không chỉ dừng lại ở " $x=22, y=14$ ".
- **Không kiểm tra lại:** Sau khi có kết quả, hãy dành vài giây để thử lại vào đề bài. Việc này giúp đảm bảo đáp án của bạn là chính xác.