

Tổng hợp các dạng bài toán cực trị số phức

(Phương pháp hình học)

Phương pháp hình học là một công cụ mạnh mẽ để giải quyết các bài toán tìm giá trị lớn nhất (Max) và giá trị nhỏ nhất (Min) liên quan đến mô-đun của số phức. Ý tưởng cốt lõi là chuyển đổi một bài toán đại số về số phức thành một bài toán hình học trong mặt phẳng tọa độ Oxy.

I. Kiến thức nền tảng

- Mỗi số phức $z = x + yi$ (với $x, y \in \mathbb{R}$) được biểu diễn bởi một điểm $M(x; y)$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy.
- Mô-đun của số phức z , ký hiệu là $|z|$, chính là khoảng cách từ gốc tọa độ O đến điểm biểu diễn M : $|z| = OM = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- Khoảng cách giữa hai điểm M_1 và M_2 biểu diễn hai số phức z_1 và z_2 là: $M_1M_2 = |z_1 - z_2|$.

II. Các dạng bài toán thường gặp

Dạng 1: Tập hợp điểm biểu diễn là ĐƯỜNG THẲNG

Đây là dạng bài toán mà điểm M biểu diễn số phức z di chuyển trên một đường thẳng cố định.

Dấu hiệu nhận biết: Biểu thức có dạng $|z - z_1| = |z - z_2|$.

Giải thích: Gọi M, A, B lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z, z_1, z_2 . Khi đó, biểu thức $|z - z_1| = |z - z_2|$ tương đương với $MA = MB$. Tập hợp các điểm M cách đều hai điểm A, B cố định là đường trung trực của đoạn thẳng AB .

Bài toán: Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = |z - z_0|$.

Phương pháp:

1. Xác định đường thẳng (d) là tập hợp các điểm M biểu diễn z .
2. Xác định điểm K biểu diễn số phức z_0 .
3. Bài toán trở thành tìm điểm M trên (d) sao cho khoảng cách MK nhỏ nhất.
4. Giá trị nhỏ nhất của MK chính là khoảng cách từ điểm K đến đường thẳng (d) :
 $\min(MK) = d(K, d)$. Giá trị này đạt được khi M là hình chiếu vuông góc của K lên (d) .

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 2 - 4i| = |z - 2i|$, tìm số phức có mô-đun nhỏ nhất.

Phân tích:

- Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z .
- Gọi $A(2; 4)$ biểu diễn $z_1 = 2 + 4i$ và $B(0; 2)$ biểu diễn $z_2 = 2i$.
- Điều kiện $|z - (2 + 4i)| = |z - 2i|$ trở thành $MA = MB$.
- Vậy M nằm trên đường trung trực (d) của đoạn thẳng AB .
- Phương trình đường thẳng (d) : Trung điểm I của AB là $I(1; 3)$. Véc-tơ $AB = (-2; -2)$, nên (d) có véc-tơ pháp tuyến $n = (1; 1)$. Phương trình (d) : $1(x-1) + 1(y-3) = 0$.

$$= 0 \Leftrightarrow x + y - 4 = 0.$$

- Bài toán yêu cầu tìm $|z|$ nhỏ nhất, tức là tìm $\min(OM)$. Đây là khoảng cách từ gốc tọa độ $O(0; 0)$ đến đường thẳng (d) .
- **$\min|z| = d(O, d) = |0 + 0 - 4| / \sqrt{1^2 + 1^2} = 4/\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.**

Ví dụ 2: Cho số phức z thỏa mãn $|z + 1| = |z + i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = |z - 2 + 3i|$.

Phân tích:

- Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn z . Điều kiện $|z - (-1)| = |z - (-i)|$ cho thấy M nằm trên đường trung trực (d) của đoạn AB với $A(-1; 0)$ và $B(0; -1)$.
- Trung điểm của AB là $I(-1/2; -1/2)$. Véc-tơ $\overrightarrow{AB} = (1; -1)$. (d) có phương trình:
 $1(x + 1/2) - 1(y + 1/2) = 0 \Leftrightarrow x - y = 0$.
- Bài toán yêu cầu tìm $\min(P) = \min|z - (2 - 3i)|$.
- Gọi $K(2; -3)$ là điểm biểu diễn số phức $z_0 = 2 - 3i$.
- Ta cần tìm $\min(MK)$ với $M \in (d)$.
- **$\min(P) = d(K, d) = |2 - (-3)| / \sqrt{1^2 + (-1)^2} = 5/\sqrt{2}$.**

Dạng 2: Tập hợp điểm biểu diễn là ĐƯỜNG TRÒN

Đây là dạng bài toán mà điểm M biểu diễn số phức z di chuyển trên một đường tròn cố định.

Dấu hiệu nhận biết: Biểu thức có dạng $|z - z_0| = R$ (với $R > 0$).

Giải thích: Gọi M là điểm biểu diễn z và I là điểm biểu diễn z_0 . Biểu thức $|z - z_0| = R$ tương đương với $IM = R$. Tập hợp các điểm M là đường tròn (C) tâm I , bán kính R .

Bài toán: Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $P = |z - z_1|$.

Phương pháp:

1. Xác định tâm I và bán kính R của đường tròn (C) từ phương trình $|z - z_0| = R$.
2. Xác định điểm K biểu diễn số phức z_1 .
3. Bài toán trở thành tìm $M \in (C)$ sao cho MK lớn nhất, nhỏ nhất.
4. Sử dụng bất đẳng thức tam giác trong hình học: $||K - I| - R| \leq MK \leq |K - I| + R$.
5. **Giá trị lớn nhất:** $\max(MK) = |IK| + R$. Đạt được khi M, I, K thẳng hàng và I nằm giữa M, K .
6. **Giá trị nhỏ nhất:** $\min(MK) = ||IK| - R|$. Đạt được khi M, I, K thẳng hàng và M nằm giữa I, K hoặc K nằm giữa I, M .

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3 - 4i| = 2$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z|$.

Phân tích:

- Gọi M là điểm biểu diễn z . Điều kiện $|z - (3 + 4i)| = 2$ cho thấy M thuộc đường tròn (C) tâm $I(3; 4)$, bán kính $R = 2$.
- Bài toán yêu cầu tìm $\max|z|$ và $\min|z|$, tức là $\max(OM)$ và $\min(OM)$. Ở đây, điểm K trùng với gốc tọa độ $O(0; 0)$.

- Tính khoảng cách OI : $OI = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.
- Áp dụng công thức:
- **$\max|z| = \max(OM) = OI + R = 5 + 2 = 7$.**
- **$\min|z| = \min(OM) = |OI - R| = |5 - 2| = 3$.**

Ví dụ 2: Cho số phức z thỏa mãn $|(1+i)z + 1 - 7i| = \sqrt{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của $|z-1|$.

Phân tích:

- Ta cần đưa điều kiện về dạng chuẩn $|z - z_0| = R$.
- $|(1+i)z + 1 - 7i| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |(1+i)(z + (1-7i)/(1+i))| = \sqrt{2}$.
- $(1-7i)/(1+i) = (1-7i)(1-i) / ((1+i)(1-i)) = (1 - i - 7i + 7i^2)/2 = (-6 - 8i)/2 = -3 - 4i$.
- Vậy, $|1+i| * |z - 3 - 4i| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2} * |z - 3 - 4i| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |z - 3 - 4i| = 1$.
- Điểm M biểu diễn z thuộc đường tròn (C) tâm $I(3; 4)$, bán kính $R = 1$.
- Bài toán yêu cầu tìm $\max|z-1|$. Gọi $K(1; 0)$ là điểm biểu diễn số phức $z_1 = 1$.
- Ta cần tìm $\max(MK)$. Khoảng cách $IK = \sqrt{(3-1)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.
- **$\max|z-1| = \max(MK) = IK + R = 2\sqrt{5} + 1$.**

Dạng 3: Tập hợp điểm biểu diễn là ĐƯỜNG ELIP

Dạng toán này ít phổ biến hơn nhưng vẫn xuất hiện trong các đề thi.

Dấu hiệu nhận biết: Biểu thức có dạng $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$, với $|z_1 - z_2| < 2a$.

Giải thích: Gọi M là điểm biểu diễn z , F_1 và F_2 là các điểm biểu diễn z_1 và z_2 . Biểu thức trên tương đương với $MF_1 + MF_2 = 2a$. Đây là định nghĩa của đường elip (E) có hai tiêu điểm là F_1, F_2 và độ dài trục lớn bằng $2a$.

Bài toán: Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $|z|$.

Phương pháp:

1. Xác định các tiêu điểm F_1, F_2 và độ dài trục lớn $2a$.
2. Viết phương trình chính tắc của elip. Đặt $2c = F_1F_2$. Ta có $b^2 = a^2 - c^2$. Phương trình elip (nếu tâm O): $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.
3. Bài toán trở thành tìm $M \in (E)$ sao cho OM lớn nhất, nhỏ nhất.

4. Nếu tâm elip là $O(0;0)$:

- $\max|z| = \max(OM) = a$ (độ dài nửa trục lớn).
- $\min|z| = \min(OM) = b$ (độ dài nửa trục bé).

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3| + |z + 3| = 10$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z|$.

Phân tích:

- Gọi $M(x; y)$ biểu diễn z . $F_1(3; 0)$ biểu diễn $z_1 = 3$ và $F_2(-3; 0)$ biểu diễn $z_2 = -3$.
- Điều kiện là $MF_1 + MF_2 = 10$. Đây là elip (E) có tiêu điểm F_1, F_2 .
- Ta có: $2a = 10 \Rightarrow a = 5$.
- Khoảng cách giữa hai tiêu điểm $F_1F_2 = |3 - (-3)| = 6$. Vậy $2c = 6 \Rightarrow c = 3$.

- Vì F_1, F_2 nằm trên Ox và đối xứng qua O nên tâm elip là $O(0; 0)$.
- Độ dài nửa trục bé: $b = \sqrt{(a^2 - c^2)} = \sqrt{(5^2 - 3^2)} = \sqrt{16} = 4$.
- Tập hợp điểm M là elip (E): $x^2/25 + y^2/16 = 1$.
- $\max|z| = a = 5$. (Khi M là đỉnh (5;0) hoặc (-5;0)).
- $\min|z| = b = 4$. (Khi M là đỉnh (0;4) hoặc (0;-4)).

III. Bảng tổng hợp các tập hợp điểm

Phương trình số phức	Tập hợp điểm M(z)	Ghi chú
$ z - z_1 = z - z_2 $	Đường trung trực của đoạn thẳng AB	A, B là điểm biểu diễn z_1, z_2 .
$ z - z_0 = R$	Đường tròn tâm I, bán kính R	I là điểm biểu diễn z_0 .
$ z - z_1 + z - z_2 = 2a$	Đường Elip	Tiêu điểm F_1, F_2 biểu diễn z_1, z_2 . Trục lớn $2a$.
$ z - z_1 - z - z_2 = 2a$	Đường Hypebol	Tiêu điểm F_1, F_2 biểu diễn z_1, z_2 . Trục thực $2a$.