

Kỹ thuật giải nhanh các bài toán Con lắc lò xo - Con lắc đơn (Biến đổi năng lượng)

Năng lượng là một đại lượng quan trọng trong dao động điều hòa. Hiểu rõ sự biến đổi và bảo toàn năng lượng giúp chúng ta giải quyết nhanh chóng nhiều dạng bài tập phức tạp về con lắc lò xo và con lắc đơn. Tài liệu này sẽ tổng hợp đầy đủ các công thức và phương pháp giải hiệu quả nhất.

I. Năng lượng của Con lắc lò xo

Xét một con lắc lò xo có độ cứng k , vật nặng khối lượng m , dao động điều hòa với biên độ A và tần số góc ω .

1. Động năng ($Wđ$)

Động năng là năng lượng của vật do chuyển động mà có.

- **Công thức:** $Wđ = 1/2 * m * v^2$
- **Giải thích:** Động năng phụ thuộc vào khối lượng (m) và bình phương vận tốc (v) của vật. Khi vật ở Vị trí cân bằng ($x=0$), vận tốc cực đại ($v=v_{max}$) nên động năng cực đại. Khi vật ở Vị trí biên ($x=\pm A$), vận tốc bằng 0 nên động năng bằng 0.
- **Biến thiên theo thời gian:** Với $v = -\omega A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$, ta có:
 $Wđ = 1/2 * m * \omega^2 * A^2 * \sin^2(\omega t + \varphi)$

Ví dụ 1: Một con lắc lò xo có $m = 100\text{g}$, dao động điều hòa. Tại thời điểm vật có vận tốc $v = 20\text{ cm/s}$ thì động năng của nó là bao nhiêu?

Giải: Đổi $m = 100\text{g} = 0.1\text{kg}$; $v = 20\text{ cm/s} = 0.2\text{ m/s}$.

Động năng của vật là: $Wđ = 1/2 * 0.1 * (0.2)^2 = 0.002\text{ J} = 2\text{ mJ}$.

2. Thế năng đàn hồi (W_t)

Thế năng là năng lượng dự trữ của hệ do vị trí hoặc trạng thái của vật.

- **Công thức:** $W_t = 1/2 * k * x^2$

- **Giải thích:** Thế năng của con lắc lò xo là thế năng đàn hồi, phụ thuộc vào độ cứng (k) và bình phương li độ (x). Khi vật ở Vị trí biên ($x = \pm A$), li độ cực đại nên thế năng cực đại. Khi vật ở Vị trí cân bằng ($x = 0$), thế năng bằng 0.

- **Biến thiên theo thời gian:** Với $x = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$, ta có:

$$W_t = 1/2 * k * A^2 * \cos^2(\omega t + \varphi)$$

Ví dụ 2: Một con lắc lò xo có độ cứng $k = 100\text{ N/m}$. Khi vật ở vị trí có li độ $x = 2\text{ cm}$, thế năng của con lắc là bao nhiêu?

Giải: Đổi $x = 2\text{ cm} = 0.02\text{ m}$.

Thế năng của con lắc là: $W_t = 1/2 * 100 * (0.02)^2 = 0.02\text{ J}$.

3. Cơ năng (W) - Định luật bảo toàn cơ năng

Nếu bỏ qua mọi ma sát, cơ năng của con lắc lò xo được bảo toàn.

- **Công thức:**

$$W = Wđ + W_t = 1/2 * m * v^2 + 1/2 * k * x^2 = \text{hằng số}$$

$$W = Wđ_{\text{max}} \text{ (khi } x=0) = 1/2 * m * v_{\text{max}}^2$$

$$W = W_t_{\text{max}} \text{ (khi } x=\pm A) = 1/2 * k * A^2$$

Từ đó suy ra: $W = 1/2 * k * A^2 = 1/2 * m * \omega^2 * A^2$

- **Giải thích:** Cơ năng là tổng động năng và thế năng. Trong quá trình dao động, động năng và thế năng chuyển hóa qua lại lẫn nhau, nhưng tổng của chúng (cơ năng) không đổi.

Ví dụ 3: Một con lắc lò xo gồm vật nặng 200g và lò xo có $k = 50 \text{ N/m}$, dao động với biên độ 4 cm. Tính cơ năng của con lắc.

Giải: Đổi $m = 200\text{g} = 0.2\text{kg}$; $A = 4 \text{ cm} = 0.04 \text{ m}$.

Cơ năng của con lắc: $W = 1/2 * k * A^2 = 1/2 * 50 * (0.04)^2 = 0.04 \text{ J}$.

4. Sự biến đổi và các công thức giải nhanh

a. Tìm vận tốc khi biết li độ x (và ngược lại)

Từ công thức bảo toàn cơ năng: $1/2 * m * v^2 + 1/2 * k * x^2 = 1/2 * k * A^2$

$$\Rightarrow v^2 = (k/m) * (A^2 - x^2) = \omega^2 * (A^2 - x^2)$$

$$v = \pm \omega * \sqrt{(A^2 - x^2)}$$

$$x = \pm \sqrt{(A^2 - v^2/\omega^2)}$$

Ví dụ: Con lắc lò xo dao động với $A = 5 \text{ cm}$, $\omega = 10 \text{ rad/s}$. Tìm vận tốc của vật khi nó có li độ $x = 3 \text{ cm}$.

Giải: $v = \pm 10 * \sqrt{(5^2 - 3^2)} = \pm 10 * \sqrt{16} = \pm 40 \text{ cm/s}$.

b. Vị trí động năng bằng n lần thế năng ($Wđ = nWt$)

Ta có: $W = Wđ + Wt = nWt + Wt = (n+1)Wt$

$$\Rightarrow 1/2 * k * A^2 = (n+1) * (1/2 * k * x^2)$$

$$\Rightarrow A^2 = (n+1)x^2$$

$$x = \pm A / \sqrt{(n+1)}$$

Ví dụ: Tìm vị trí mà tại đó động năng gấp 3 lần thế năng ($n=3$).

Giải: $x = \pm A / \sqrt{(3+1)} = \pm A/2$.

c. Vị trí thế năng bằng n lần động năng ($W_t = nW_d$)

Ta có: $W = W_d + W_t = W_d + nW_d = (n+1)W_d$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} * k * A^2 = (n+1) * (\frac{1}{2} * m * v^2)$$

$$\Rightarrow k * A^2 = (n+1) * m * v^2$$

$$\Rightarrow v^2 = (k * A^2) / (m * (n+1)) = \omega^2 A^2 / (n+1)$$

$$v = \pm \omega A / \sqrt{(n+1)}$$

Tương tự, từ $W = (W_t/n) + W_t = W_t * (n+1)/n$:

$$\Rightarrow \frac{1}{2} * k * A^2 = (\frac{1}{2} * k * x^2) * (n+1)/n$$

$$x = \pm A * \sqrt{(n / (n+1))}$$

Ví dụ: Tìm li độ của vật khi thế năng bằng động năng ($n=1$).

Giải: $x = \pm A * \sqrt{(1 / (1+1))} = \pm A/\sqrt{2}$.

II. Năng lượng của Con lắc đơn

Xét một con lắc đơn có chiều dài l , vật nặng khối lượng m , dao động tại nơi có gia tốc trọng trường g . Chọn mốc thế năng tại vị trí cân bằng (vị trí thấp nhất).

1. Động năng (W_d)

Công thức tương tự con lắc lò xo: **$W_d = \frac{1}{2} * m * v^2$**

2. Thế năng trọng trường (W_t)

Thế năng của con lắc đơn là thế năng trọng trường.

- **Công thức tổng quát: $W_t = mgh$** , với h là độ cao của vật so với VTCB.

- **Biểu thức theo li độ góc α :** $h = l - l \cdot \cos \alpha = l(1 - \cos \alpha)$.

$$W_t = mgl(1 - \cos \alpha)$$

- **Với dao động nhỏ ($\alpha < 10^\circ$):** $\cos \alpha \approx 1 - \alpha^2/2$ (α tính bằng radian).

$$W_t \approx mgl * (\alpha^2/2) = 1/2 * m * (g/l) * (l\alpha)^2 = 1/2 * m * \omega^2 * s^2 \text{ (với } s = l\alpha \text{ là li độ dài)}.$$

Ví dụ: Một con lắc đơn $m=1\text{kg}$, $l=1\text{m}$, $g=10\text{m/s}^2$. Kéo con lắc lệch khỏi VTCB một góc 60° rồi thả nhẹ. Tính thế năng tại vị trí đó.

Giải: $W_t = mgl(1 - \cos 60^\circ) = 1 * 10 * 1 * (1 - 0.5) = 5 \text{ J}.$

3. Cơ năng (W) - Định luật bảo toàn cơ năng

Nếu bỏ qua ma sát, cơ năng của con lắc đơn được bảo toàn.

- **Công thức:**

$$W = W_{đ} + W_t = 1/2 * m * v^2 + mgl(1 - \cos \alpha) = \text{hằng số}$$

- Cơ năng bằng thế năng cực đại tại vị trí biên (góc lệch cực đại α_0 , $v=0$):

$$W = mgl(1 - \cos \alpha_0)$$

- Đối với dao động nhỏ:

$$W \approx 1/2 * mgl * \alpha_0^2 = 1/2 * m * \omega^2 * s_0^2 \text{ (với } s_0 = l\alpha_0 \text{ là biên độ dài)}.$$

Ví dụ: Con lắc đơn ở ví dụ trên có cơ năng là bao nhiêu?

Giải: Vì vật được thả nhẹ tại góc 60° , nên $\alpha_0 = 60^\circ$. Cơ năng bằng thế năng tại vị trí biên.

$$W = 5 \text{ J}.$$

4. Các công thức giải nhanh

a. Tìm vận tốc v theo li độ góc α

Từ bảo toàn cơ năng: $\frac{1}{2} * m * v^2 + mgl(1 - \cos\alpha) = mgl(1 - \cos\alpha_0)$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} * v^2 = gl(\cos\alpha - \cos\alpha_0)$$

$$v^2 = 2gl(\cos\alpha - \cos\alpha_0)$$

Ví dụ: Con lắc đơn có $l=1\text{m}$, $g=10\text{m/s}^2$, dao động với biên độ góc $\alpha_0=60^\circ$. Tính vận tốc của vật khi đi qua VTCB ($\alpha=0$).

Giải: $v^2 = 2 * 10 * 1 * (\cos 0^\circ - \cos 60^\circ) = 20 * (1 - 0.5) = 10.$

$$v = \sqrt{10} \approx 3.16 \text{ m/s}.$$

b. Tìm lực căng dây T theo li độ góc α

Áp dụng định luật II Newton theo phương hướng tâm:

$$T - P\cos\alpha = F_{ht} = mv^2/l$$

$$\Rightarrow T = mg\cos\alpha + mv^2/l = mg\cos\alpha + m * 2gl(\cos\alpha - \cos\alpha_0) / l$$

$$\Rightarrow T = mg\cos\alpha + 2mg(\cos\alpha - \cos\alpha_0)$$

$$T = mg(3\cos\alpha - 2\cos\alpha_0)$$

Ví dụ: Với con lắc trên, tính lực căng dây tại VTCB ($\alpha=0$) và tại vị trí biên ($\alpha=\alpha_0=60^\circ$). Cho $m = 1\text{kg}$.

Giải:

Tại VTCB ($\alpha=0$): $T_{\text{max}} = mg(3\cos 0^\circ - 2\cos 60^\circ) = 1*10*(3*1 - 2*0.5) = 20 \text{ N}.$

Tại biên ($\alpha=60^\circ$): $T_{\text{min}} = mg(3\cos 60^\circ - 2\cos 60^\circ) = mg\cos 60^\circ = 1*10*0.5 = 5 \text{ N}.$

c. Vị trí động năng bằng n lần thế năng (Wđ = nWt)

$W = (n+1)W_t \Rightarrow mgl(1 - \cos\alpha_0) = (n+1)mgl(1 - \cos\alpha)$

$\Rightarrow 1 - \cos\alpha_0 = (n+1)(1 - \cos\alpha)$

$\cos\alpha = (n + \cos\alpha_0) / (n+1)$

Với dao động nhỏ: $\alpha = \pm \alpha_0 / \sqrt{(n+1)}$

Ví dụ: Con lắc đơn dao động với biên độ góc $\alpha_0 = 6^\circ$. Tìm vị trí α để $W_d = 3W_t$.

Giải: Vì góc nhỏ, ta dùng công thức gần đúng: $\alpha = \pm 6^\circ / \sqrt{(3+1)} = \pm 3^\circ$.

III. Bảng so sánh Năng lượng Con lắc lò xo và Con lắc đơn (dao động nhỏ)

Đại lượng	Con lắc lò xo	Con lắc đơn (dao động nhỏ)
Động năng (Wđ)	$1/2 * m * v^2$	$1/2 * m * v^2$
Thế năng (Wt)	$1/2 * k * x^2$	$1/2 * mgl * \alpha^2 = 1/2 * m\omega^2 * s^2$
Cơ năng (W)	$1/2 * k * A^2 = 1/2 * m\omega^2 * A^2$	$1/2 * mgl * \alpha_0^2 = 1/2 * m\omega^2 * s_0^2$
Liên hệ li độ - vận tốc	$x^2 + v^2/\omega^2 = A^2$	$s^2 + v^2/\omega^2 = s_0^2$
Vị trí Wđ = nWt	$x = \pm A / \sqrt{(n+1)}$	$s = \pm s_0 / \sqrt{(n+1)}$ (hay $\alpha = \pm \alpha_0 / \sqrt{(n+1)}$)

IV. Bài toán va chạm và sự thay đổi năng lượng

Đây là dạng bài toán kết hợp định luật bảo toàn động lượng (khi va chạm) và định luật bảo toàn cơ năng (sau va chạm).

1. Va chạm mềm

Va chạm mềm là va chạm mà sau đó hai vật dính vào nhau và chuyển động cùng vận tốc.

• Nguyên tắc:

1. Áp dụng định luật bảo toàn động lượng để tìm vận tốc của hệ ngay sau va chạm.
2. Vận tốc này chính là vận tốc ban đầu của hệ trong một dao động mới.
3. Dùng các công thức về năng lượng để tìm biên độ dao động mới.

• Công thức bảo toàn động lượng: $m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)V$

Ví dụ: Một vật nhỏ $m_1 = 100\text{g}$ bay với vận tốc $v_1 = 2\text{ m/s}$ đến va chạm mềm với vật $m_2 = 300\text{g}$ đang đứng yên ở VTCB của một con lắc lò xo có $k=100\text{ N/m}$. Tìm biên độ dao động của hệ sau va chạm.

Giải:

1. Bảo toàn động lượng: $m_1v_1 = (m_1 + m_2)V \Rightarrow 0.1 * 2 = (0.1 + 0.3) * V \Rightarrow V = 0.5\text{ m/s}$.
2. Vận tốc $V = 0.5\text{ m/s}$ chính là vận tốc cực đại của hệ sau va chạm (vì va chạm tại VTCB).
3. Cơ năng của hệ sau va chạm: $W' = 1/2 * (m_1 + m_2) * V^2 = 1/2 * (0.4) * (0.5)^2 = 0.05\text{ J}$.

4. Cơ năng cũng bằng $W' = 1/2 * k * A'^2 \Rightarrow 0.05 = 1/2 * 100 * A'^2 \Rightarrow A'^2 = 0.001$.

$\Rightarrow A' = \sqrt{0.001} \approx 0.0316 \text{ m} = 3.16 \text{ cm}$.

2. Va chạm đàn hồi

Va chạm đàn hồi là va chạm mà tổng động năng của hệ được bảo toàn.

- **Nguyên tắc:** Tương tự va chạm mềm, nhưng sử dụng hệ phương trình bảo toàn động lượng và động năng để tìm vận tốc vật ngay sau va chạm.

- **Công thức:**

Bảo toàn động lượng: $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$

Bảo toàn động năng: $1/2 m_1 v_1^2 + 1/2 m_2 v_2^2 = 1/2 m_1 v'^2_1 + 1/2 m_2 v'^2_2$

Ví dụ: Một quả cầu $m_1 = 200\text{g}$ đang chuyển động với vận tốc 5 m/s va chạm đàn hồi xuyên tâm với quả cầu $m_2 = 300\text{g}$ đang đứng yên (vật nặng của con lắc đơn). Sau va chạm, m_2 dao động. Tìm biên độ góc cực đại α_0 của con lắc m_2 , biết $l=1\text{m}$, $g=10\text{m/s}^2$.

Giải:

1. Vận tốc của m_2 sau va chạm đàn hồi (công thức tính nhanh):

$$v'_2 = [2m_1/(m_1+m_2)] * v_1 = [2*0.2/(0.2+0.3)]*5 = 4 \text{ m/s}.$$

2. Vận tốc v'_2 là vận tốc cực đại của con lắc đơn (vì va chạm tại VTCB).

3. Áp dụng bảo toàn cơ năng cho con lắc đơn: $W = W_{đ_max} = W_{t_max}$

$$1/2 * m_2 * (v'_2)^2 = m_2 g l (1 - \cos \alpha_0)$$

$$1/2 * (4)^2 = 10 * 1 * (1 - \cos \alpha_0)$$

$$8 = 10(1 - \cos \alpha_0) \Rightarrow 1 - \cos \alpha_0 = 0.8 \Rightarrow \cos \alpha_0 = 0.2.$$

$$\Rightarrow \alpha_0 = \arccos(0.2) \approx 78.5^\circ.$$