

Tổng quan kiến thức về Hình nón - Khối nón tròn xoay

Chuyên đề này cung cấp một cái nhìn toàn diện và chi tiết về hình nón và khối nón tròn xoay, một trong những nội dung quan trọng trong chương trình Hình học không gian lớp 12. Tài liệu bao gồm định nghĩa, các công thức tính toán cơ bản và các dạng bài toán liên quan.

1. Định nghĩa Hình nón tròn xoay

Hình nón tròn xoay được tạo thành khi quay một tam giác vuông một vòng quanh một cạnh góc vuông cố định của nó.

- Khi quay tam giác vuông OIM quanh cạnh góc vuông OI , đường gấp khúc OIM tạo thành một hình nón tròn xoay.
- **Đỉnh:** Điểm O .
- **Trục của hình nón:** Đường thẳng OI .
- **Đường sinh:** Cạnh huyền OM (ký hiệu là l). Tất cả các đường sinh của hình nón đều có độ dài bằng nhau.
- **Mặt đáy:** Hình tròn tâm I , bán kính IM (ký hiệu là r).
- **Chiều cao:** Độ dài đoạn OI (ký hiệu là h).
- **Mặt xung quanh:** Là phần mặt tròn xoay được tạo bởi các đường sinh.

Khối nón: là phần không gian được giới hạn bởi một hình nón tròn xoay, kể cả hình nón đó.

2. Các yếu tố và mối liên hệ trong hình nón

Trong một hình nón, ba đại lượng cơ bản là chiều cao (h), bán kính đáy (r) và đường sinh (l) có mối quan hệ mật thiết với nhau thông qua định lý Pytago trong tam giác vuông tạo thành hình nón.

Công thức liên hệ:

$$l^2 = h^2 + r^2$$

Giải thích: Công thức này xuất phát trực tiếp từ tam giác vuông OIM (với O là đỉnh, I là tâm đáy, M là một điểm trên đường tròn đáy), trong đó l là cạnh huyền, h và r là hai cạnh góc vuông.

Ví dụ minh họa:

1. **Ví dụ 1:** Một hình nón có chiều cao $h = 8$ cm và bán kính đáy $r = 6$ cm. Tính độ dài đường sinh của hình nón.

Giải: Áp dụng công thức $l^2 = h^2 + r^2$, ta có:

$$l^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$$

$$\Rightarrow l = \sqrt{100} = 10 \text{ cm. Vậy đường sinh của hình nón là 10 cm.}$$

2. **Ví dụ 2:** Một hình nón có đường sinh $l = 13$ cm và chiều cao $h = 12$ cm. Tính bán kính đáy của hình nón.

Giải: Từ công thức $l^2 = h^2 + r^2$, ta suy ra $r^2 = l^2 - h^2$:

$$r^2 = 13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25$$

$\Rightarrow r = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$. Vậy bán kính đáy của hình nón là 5 cm.

3. Diện tích hình nón

a. Diện tích xung quanh (S_{xq})

Diện tích xung quanh của hình nón là diện tích của mặt bên hình nón.

$$S_{xq} = \pi r l$$

Giải thích: Khi trải phẳng mặt xung quanh của hình nón, ta được một hình quạt tròn có bán kính bằng đường sinh l và độ dài cung tròn bằng chu vi đáy của hình nón ($2\pi r$).

Ví dụ minh họa:

1. **Ví dụ 1:** Tính diện tích xung quanh của hình nón có bán kính đáy $r = 3 \text{ cm}$ và đường sinh $l = 5 \text{ cm}$.

Giải: Áp dụng công thức $S_{xq} = \pi r l$:

$$S_{xq} = \pi * 3 * 5 = 15\pi \text{ cm}^2.$$

2. **Ví dụ 2:** Một hình nón có chiều cao $h = 4 \text{ cm}$ và bán kính đáy $r = 3 \text{ cm}$. Tính diện tích xung quanh.

Giải: Trước hết, ta cần tìm đường sinh l :

$$l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}.$$

Sau đó, tính diện tích xung quanh:

$$S_{xq} = \pi r l = \pi * 3 * 5 = 15\pi \text{ cm}^2.$$

b. Diện tích toàn phần (S_{tp})

Diện tích toàn phần của hình nón bằng tổng của diện tích xung quanh và diện tích mặt đáy.

$$S_{tp} = S_{xq} + S_{\text{đáy}} = \pi r l + \pi r^2$$

Ví dụ minh họa:

Ví dụ: Tính diện tích toàn phần của hình nón có bán kính đáy $r = 5 \text{ cm}$ và đường sinh $l = 10 \text{ cm}$.

Giải:

Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \pi r l = \pi * 5 * 10 = 50\pi \text{ cm}^2.$

Diện tích đáy: $S_{\text{đáy}} = \pi r^2 = \pi * 5^2 = 25\pi \text{ cm}^2.$

Diện tích toàn phần: $S_{tp} = 50\pi + 25\pi = 75\pi \text{ cm}^2.$

4. Thể tích khối nón

Thể tích của khối nón được tính bằng một phần ba tích của diện tích đáy và chiều cao.

$$V = (1/3)\pi r^2 h$$

Giải thích: Thể tích khối nón bằng 1/3 thể tích khối trụ có cùng bán kính đáy và chiều cao.

Ví dụ minh họa:

1. **Ví dụ 1:** Tính thể tích của khối nón có chiều cao $h = 9$ cm và bán kính đáy $r = 4$ cm.

Giải: Áp dụng công thức $V = (1/3)\pi r^2 h$:

$$V = (1/3)\pi * 4^2 * 9 = (1/3)\pi * 16 * 9 = 48\pi \text{ cm}^3.$$

2. **Ví dụ 2:** Một khối nón có đường sinh $l = 5$ cm và bán kính đáy $r = 3$ cm. Tính thể tích khối nón.

Giải: Đầu tiên, tìm chiều cao h :

$$h = \sqrt{(l^2 - r^2)} = \sqrt{(5^2 - 3^2)} = \sqrt{(25 - 9)} = \sqrt{16} = 4 \text{ cm}.$$

Tiếp theo, tính thể tích:

$$V = (1/3)\pi r^2 h = (1/3)\pi * 3^2 * 4 = (1/3)\pi * 9 * 4 = 12\pi \text{ cm}^3.$$

5. Thiết diện của hình nón

Thiết diện là mặt cắt của hình nón khi bị cắt bởi một mặt phẳng. Hình dạng của thiết diện phụ thuộc vào vị trí của mặt phẳng cắt.

a. Thiết diện qua trục

Khi cắt hình nón bằng một mặt phẳng chứa trục của nó, thiết diện thu được là một tam giác cân.

- **Đỉnh:** là đỉnh của hình nón.
- **Cạnh bên:** là hai đường sinh của hình nón (độ dài bằng l).
- **Cạnh đáy:** là đường kính của mặt đáy hình nón (độ dài bằng $2r$).

- **Chiều cao:** là chiều cao của hình nón (h).

Ví dụ: Một hình nón có thiết diện qua trục là một tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng 10. Tính thể tích khối nón.

Giải:

Vì thiết diện là tam giác vuông cân, hai cạnh góc vuông chính là hai đường sinh, $l = 10$.

Cạnh huyền của tam giác này là đường kính đáy: $2r = l/\sqrt{2} = 10/\sqrt{2} \Rightarrow r = 5\sqrt{2}$.

Trong tam giác vuông cân này, đường cao ứng với cạnh huyền cũng là đường trung tuyến, nên $h = (2r)/2 = r = 5\sqrt{2}$.

Thể tích khối nón: $V = (1/3)\pi r^2 h = (1/3)\pi * (5\sqrt{2})^2 * (5\sqrt{2}) = (1/3)\pi * 50 * 5\sqrt{2} = (250\sqrt{2})/3 \pi$.

b. Thiết diện song song với đáy

Khi cắt hình nón bằng một mặt phẳng song song với mặt đáy, thiết diện thu được là một hình tròn nhỏ hơn, đồng tâm với hình tròn đáy. Mặt phẳng này chia hình nón ban đầu thành một hình nón nhỏ ở trên và một hình nón cụt ở dưới.

Ví dụ: Cắt một hình nón bằng một mặt phẳng song song với đáy và đi qua trung điểm của đường cao. Tính tỉ số thể tích của khối nón nhỏ tạo thành và khối nón ban đầu.

Giải:

Gọi V , h , r lần lượt là thể tích, chiều cao, bán kính đáy của hình nón ban đầu.

Gọi V' , h' , r' lần lượt là thể tích, chiều cao, bán kính đáy của hình nón nhỏ tạo thành.

Theo giả thiết, $h' = h/2$. Theo định lý Talet, ta có tỉ số đồng dạng $k = h'/h = r'/r = 1/2$.

Tỉ số thể tích của hai khối nón đồng dạng bằng lập phương tỉ số đồng dạng: $V'/V = k^3 = (1/2)^3 = 1/8$.

6. Hình nón cụt

Hình nón cụt được tạo thành khi cắt một hình nón bởi một mặt phẳng song song với đáy và bỏ đi phần hình nón nhỏ phía trên.

Các yếu tố và công thức:

- **R**: Bán kính đáy lớn.
- **r**: Bán kính đáy nhỏ.
- **h**: Chiều cao của hình nón cụt.
- **l**: Đường sinh của hình nón cụt.

Liên hệ giữa các yếu tố: $l^2 = h^2 + (R - r)^2$

Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \pi(R + r)l$

Thể tích: $V = (1/3)\pi h(R^2 + Rr + r^2)$

Ví dụ minh họa:

Ví dụ: Một chiếc xô hình nón cụt có bán kính đáy lớn $R = 15$ cm, bán kính đáy nhỏ $r = 10$ cm và chiều cao $h = 20$ cm. Tính thể tích của xô.

Giải: Áp dụng công thức thể tích hình nón cụt:

$$V = (1/3)\pi h(R^2 + Rr + r^2)$$

$$V = (1/3)\pi * 20 * (15^2 + 15*10 + 10^2)$$

$$V = (20\pi/3) * (225 + 150 + 100) = (20\pi/3) * 475 = 9500\pi/3 \text{ cm}^3.$$

7. Bảng tổng hợp công thức

Đại lượng	Hình Nón	Hình Nón Cụt
Mối liên hệ cơ bản	$l^2 = h^2 + r^2$	$l^2 = h^2 + (R - r)^2$
Diện tích xung quanh (S _{xq})	$S_{xq} = \pi rl$	$S_{xq} = \pi(R + r)l$
Diện tích toàn phần (S _{tp})	$S_{tp} = \pi rl + \pi r^2$	$S_{tp} = \pi(R + r)l + \pi R^2 + \pi r^2$
Thể tích (V)	$V = (1/3)\pi r^2 h$	$V = (1/3)\pi h(R^2 + Rr + r^2)$