

Tổng hợp kiến thức: Phương trình bậc hai chứa tham số và Định lý Vi-ét

Tài liệu này cung cấp một cái nhìn tổng quan và chi tiết về cách giải và biện luận phương trình bậc hai chứa tham số, cũng như các ứng dụng sâu rộng của định lý Vi-ét trong chương trình Toán lớp 10.

Phần 1: Ôn tập về phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

1.1. Công thức nghiệm

Để giải phương trình bậc hai, ta sử dụng biệt thức Delta (Δ).

- **Biệt thức Delta (Δ):** $\Delta = b^2 - 4ac$
- **Biệt thức thu gọn Delta phẩy (Δ'):** Dùng khi hệ số b là số chẵn ($b = 2b'$).
 $\Delta' = (b')^2 - ac$

1.2. Biện luận số nghiệm dựa vào Delta (Δ)

Số nghiệm của phương trình bậc hai phụ thuộc hoàn toàn vào dấu của biệt thức Δ .

Dấu của Δ	Số nghiệm	Công thức nghiệm
$\Delta > 0$	Phương trình có 2 nghiệm phân biệt.	$x_{1,2} = (-b \pm \sqrt{\Delta}) / 2a$
$\Delta = 0$	Phương trình có nghiệm kép.	$x_1 = x_2 = -b / 2a$
$\Delta < 0$	Phương trình vô nghiệm.	Không có nghiệm thực

Phần 2: Biện luận phương trình bậc hai chứa tham số m

Đây là dạng toán yêu cầu tìm điều kiện của tham số m để phương trình có số nghiệm thỏa mãn một điều kiện cho trước.

2.1. Trường hợp hệ số a chứa tham số

Khi hệ số a của x^2 chứa tham số m, ta phải xét 2 trường hợp:

1. Trường hợp 1: $a = 0$

Thay giá trị m làm cho $a = 0$ vào phương trình ban đầu. Phương trình trở thành phương trình bậc nhất. Giải và biện luận phương trình bậc nhất này.

2. Trường hợp 2: $a \neq 0$

Với điều kiện của m để $a \neq 0$, phương trình là phương trình bậc hai. Ta tính Δ (hoặc Δ') và biện luận số nghiệm dựa vào dấu của Δ như bình thường.

Ví dụ: Biện luận theo m số nghiệm của phương trình: $(m - 1)x^2 - 2(m - 1)x + m = 0$.

- Trường hợp 1: $a = 0 \Leftrightarrow m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$

Thay $m = 1$ vào phương trình, ta được: $0.x^2 - 0.x + 1 = 0 \Leftrightarrow 1 = 0$ (Vô lý). Vậy phương trình vô nghiệm khi $m = 1$.

• Trường hợp 2: $a \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$

Phương trình là bậc hai. Ta tính Δ' :

$$\Delta' = (b')^2 - ac = (-(m-1))^2 - (m-1)m = (m-1)^2 - m(m-1) = (m-1)(m-1-m) = -(m-1) = 1 - m$$

- Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 1 - m > 0 \Leftrightarrow m < 1$: Phương trình có 2 nghiệm phân biệt.
- Nếu $\Delta' = 0 \Leftrightarrow 1 - m = 0 \Leftrightarrow m = 1$: Kết hợp với điều kiện $m \neq 1$, trường hợp này không xảy ra.
- Nếu $\Delta' < 0 \Leftrightarrow 1 - m < 0 \Leftrightarrow m > 1$: Phương trình vô nghiệm.

Kết luận:

- Với $m < 1$, phương trình có 2 nghiệm phân biệt.
- Với $m \geq 1$, phương trình vô nghiệm.

2.2. Trường hợp hệ số a là hằng số ($a \neq 0$)

Đây là trường hợp đơn giản hơn. Ta chỉ cần tính Δ và giải các bất phương trình hoặc phương trình $\Delta > 0$, $\Delta = 0$, $\Delta < 0$ để tìm m .

Ví dụ: Tìm m để phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - m + 1 = 0$ có nghiệm.

Phương trình đã cho có $a = 1 \neq 0$. Để phương trình có nghiệm, ta cần $\Delta' \geq 0$.

$$\Delta' = (-m)^2 - 1.(m^2 - m + 1) = m^2 - m^2 + m - 1 = m - 1$$

Phương trình có nghiệm khi $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m - 1 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 1$.

Vậy với $m \geq 1$ thì phương trình đã cho có nghiệm.

Phần 3: Định lý Vi-ét và các ứng dụng

3.1. Định lý Vi-ét (Thuận)

Nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm x_1 và x_2 , thì tổng và tích của hai nghiệm đó được tính như sau:

- **Tổng hai nghiệm (S):** $S = x_1 + x_2 = -b/a$
- **Tích hai nghiệm (P):** $P = x_1 * x_2 = c/a$

Lưu ý quan trọng: Chỉ được áp dụng định lý Vi-ét khi phương trình có nghiệm (tức là $\Delta \geq 0$).

Ví dụ: Cho phương trình $2x^2 - 5x + 1 = 0$. Không giải phương trình, hãy tính tổng và tích các nghiệm.

Ta có $\Delta = (-5)^2 - 4*2*1 = 25 - 8 = 17 > 0$, vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Áp dụng định lý Vi-ét:

- $S = x_1 + x_2 = -(-5)/2 = 5/2$
- $P = x_1 * x_2 = 1/2$

3.2. Định lý Vi-ét (Đảo)

Nếu hai số u và v có tổng $u + v = S$ và tích $u * v = P$, thì u và v là hai nghiệm của phương trình:

$$X^2 - SX + P = 0$$

Điều kiện để tồn tại hai số u, v là $S^2 - 4P \geq 0$.

Ví dụ: Tìm hai số biết tổng của chúng bằng 10 và tích của chúng bằng 21.

Gọi hai số cần tìm là u và v . Ta có $S = u + v = 10$ và $P = u * v = 21$.

Hai số u, v là nghiệm của phương trình: $X^2 - 10X + 21 = 0$.

Giải phương trình này, ta được $X_1 = 3, X_2 = 7$. Vậy hai số cần tìm là 3 và 7.

Phần 4: Các ứng dụng quan trọng của Định lý Vi-ét

4.1. Tính giá trị của biểu thức đối xứng giữa các nghiệm

Ta có thể biểu diễn các biểu thức đối xứng của x_1 và x_2 qua tổng S và tích P .

- $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2P$
- $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = S(S^2 - 3P)$
- $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = S^2 - 4P \Rightarrow |x_1 - x_2| = \sqrt{(S^2 - 4P)}$
- $1/x_1 + 1/x_2 = (x_1 + x_2)/(x_1x_2) = S/P$ (với $P \neq 0$)

Ví dụ: Cho phương trình $x^2 - 3x - 7 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Tính giá trị của $A = x_1^2 + x_2^2$.

Phương trình có $a.c = 1.(-7) = -7 < 0$ nên luôn có 2 nghiệm phân biệt.

Theo Vi-ét: $S = x_1 + x_2 = 3; P = x_1x_2 = -7$.

Ta có: $A = x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P = 3^2 - 2(-7) = 9 + 14 = 23$.

4.2. Xét dấu các nghiệm của phương trình bậc hai

Đây là một ứng dụng rất mạnh, cho phép ta biết dấu của các nghiệm mà không cần giải phương trình.

Tính chất nghiệm	Điều kiện
Có 2 nghiệm trái dấu ($x_1 < 0 < x_2$)	$P < 0$ (hoặc $a.c < 0$)
Có 2 nghiệm dương phân biệt ($0 < x_1 < x_2$)	$\Delta > 0, P > 0, S > 0$
Có 2 nghiệm âm phân biệt ($x_1 < x_2 < 0$)	$\Delta > 0, P > 0, S < 0$
Có 2 nghiệm dương (có thể trùng nhau)	$\Delta \geq 0, P > 0, S > 0$
Có 2 nghiệm âm (có thể trùng nhau)	$\Delta \geq 0, P > 0, S < 0$
Có 2 nghiệm cùng dấu	$\Delta \geq 0, P > 0$

Ví dụ: Tìm m để phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3m = 0$ có hai nghiệm trái dấu.

Để phương trình có hai nghiệm trái dấu, điều kiện là $P < 0$.

$P = x_1x_2 = c/a = m^2 - 3m$

Ta cần giải bất phương trình: $m^2 - 3m < 0 \Leftrightarrow m(m - 3) < 0$.

Lập bảng xét dấu hoặc giải nhanh, ta được $0 < m < 3$.

Vậy với $0 < m < 3$, phương trình có hai nghiệm trái dấu.

4.3. Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào tham số m

Phương pháp chung là:

1. Tìm điều kiện để phương trình có nghiệm ($\Delta \geq 0$).
2. Tính S và P theo tham số m .
3. Từ hai biểu thức S và P , ta rút m từ một biểu thức và thế vào biểu thức còn lại để khử m . Hệ thức thu được là hệ thức cần tìm.

Ví dụ: Cho phương trình $x^2 - (m+1)x + m = 0$. Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1 và x_2 độc lập với m .

1. $\Delta = (m+1)^2 - 4m = m^2 + 2m + 1 - 4m = m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2 \geq 0$ với mọi m .

Phương trình luôn có nghiệm.

2. Theo Vi-ét:

- $S = x_1 + x_2 = m + 1$ (1)

- $P = x_1 x_2 = m$ (2)

3. Từ (1) ta có $m = S - 1$. Thế vào (2): $P = S - 1$.

Vậy hệ thức cần tìm là $x_1 x_2 = (x_1 + x_2) - 1$.

4.4. Tìm GTLN, GTNN của biểu thức đối xứng giữa các nghiệm

Phương pháp chung:

1. Tìm điều kiện của m để phương trình có nghiệm ($\Delta \geq 0$).
2. Biến đổi biểu thức cần tìm GTLN/GTNN về dạng chứa tổng S và tích P .

3. Thay S, P theo m vào biểu thức, ta được một hàm số theo m.
4. Tìm GTLN/GTNN của hàm số này với điều kiện của m đã tìm ở bước 1.

Ví dụ: Cho phương trình $x^2 - 2mx + 4m - 4 = 0$. Tìm m để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 và tìm GTNN của $A = x_1^2 + x_2^2$.

1. Điều kiện có nghiệm: $\Delta' = (-m)^2 - (4m - 4) = m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2 \geq 0$.
Phương trình luôn có nghiệm với mọi m.
 2. Theo Vi-ét: $S = 2m$; $P = 4m - 4$.
 3. Biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P = (2m)^2 - 2(4m - 4) = 4m^2 - 8m + 8$.
 4. Ta cần tìm GTNN của $A(m) = 4m^2 - 8m + 8$. Đây là một parabol có bề lõm quay lên. GTNN đạt tại đỉnh.
 5. Hoành độ đỉnh $m = -(-8)/(2 \cdot 4) = 1$. Giá trị này thỏa mãn điều kiện có nghiệm (mọi m).
 6. GTNN của A là $A(1) = 4(1)^2 - 8(1) + 8 = 4$.
- Vậy GTNN của A là 4, đạt được khi $m = 1$.